南京大學

本 科 毕 业 论 文

院　　系　数学系

专　　业　数学与应用数学

题　　目　一类 **Frobenius Lie** 代数的分类

年　　级　**2017** 级　　学　　号　**171840678**

学生姓名　吴乘洋

指导老师　朱富海　　职　　称　教授

提交日期　**2021** 年 **5** 月 **16** 日

南京大学本科生毕业论文 (设计、作品) 中文摘要

题目：一类 **Frobenius Lie** 代数的分类
院系：数学系
专业：数学与应用数学
本科生姓名：吴乘洋
指导老师（姓名、职称）：朱富海教授

摘要：

任意域上的一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 称为 Frobenius Lie 代数, 如果存在线性函数 $f \in \mathfrak{g}^*$ 使得 $\mathrm{d}f(\cdot,\cdot) = f([\cdot,\cdot])$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的反对称非退化双线性型. 此时 f 通过 $x \mapsto f([x,\cdot])$ 诱导了一个典范的同构 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, 其中 $f \in \mathfrak{g}^*$ 在这个同构下的原像 x_f 称为 f 对应的主元素, 不妨设为半单元.

本文主要研究的是一类 Frobenius Lie 代数的结构与分类问题, 主要方法是考虑其主元素伴随作用的特征子空间分解. 具体地说, 对于特征值只有 0 与 1 的情形, 我们设法约化为 $(n-1)$ 个可交换的幂零矩阵与一个单位阵在 n 维空间上的表示问题, 从而可以写成较好的上三角分层形式; 对于零权空间一维的情形, 我们先通过中心扩张和导子扩张的手段将其转化为一类幂零分次 Quasi-Frobenius Lie 代数的相关问题, 再由细致的讨论完全确定 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \leq 8$ 时的分类.

关键词： Frobenius Lie 代数; 幂零分次 Lie 代数; 主元素; 特征子空间分解; 中心扩张与导子扩张

南京大学本科生毕业论文 (设计、作品) 英文摘要

THESIS: On a class of Frobenius Lie Algebras
DEPARTMENT: Department of Mathematics
SPECIALIZATION: Mathematics and Applied Mathematics
UNDERGRADUATE: Chengyang Wu
MENTOR: Professor Fuhai Zhu

ABSTRACT:

A Lie algebra $\mathfrak{g}$ over an arbitrary field is called a Frobenius Lie algerba, if there exists a linear function $f \in \mathfrak{g}^*$ such that $\mathrm{d}f(\cdot,\cdot) = f([\cdot,\cdot])$ is an alternating nondegenerate bilinear form on $\mathfrak{g}$. Now f induces a canonical isomorphism $\mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}^*$ by sending $x \in \mathfrak{g}$ to $f([x,\cdot]) \in \mathfrak{g}^*$, under which the inverse image of $f \in \mathfrak{g}^*$ is called a principal element with respect to f, denoted by x_f. Without loss of generality, we may assume that the principal element is semisimple.

This paper will mainly focus on the structure and classification of some Frobenius Lie algebras, by considering the eigenspace decomposition of the adjoint action of the principal element. To be specific, for the case where the spectrum consists of 0 and 1, we manage to reduce the problem to a representation problem about $(n-1)$'s commutative nilpotent matrices and an identity acting on an n-dimensional space, so that they will be of the desired graded upper-triangular forms; for the case where the zero-eigenspace is one-dimensional, we first convert the problems to related ones on some graded nilpotent Quasi-Frobenius Lie algebras via central extension and derivation extension, and then carefully determine the classification when $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \leq 8$.

KEY WORDS: Frobenius Lie algebra, Graded nilpoent Lie algebra, Principal elemnent, Eigenspace decomposition, Central extension and Derivation extension

目　　录

第一章　引言

1.1　研究背景

设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 为特征为 0 的域上的一个有限维 Lie 代数. 我们知道 $\mathfrak{g}$ 的结构与 $\mathfrak{g}$ 上的双线性型密切相关, 例如 $\mathfrak{g}$ 为半单的当且仅当 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 型非退化 [22, 定理 5.1]. 一般地, 若 $\mathfrak{g}$ 上存在一个对称的非退化双线性型 $B(\cdot,\cdot)$, 且满足结合性 $B([x,y],z) = B(x,[y,z]),\ \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为 Quadratic Lie 代数.

若 $\mathfrak{g}$ 上存在一个反对称的非退化双线性型 $\omega(\cdot,\cdot)$, 且满足 Jacobi 等式 $\omega([x,y],z) + \omega([y,z],x) + \omega([z,x],y) = 0,\ \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为 Quasi-Frobenius Lie 代数, ω 也称为 $\mathfrak{g}$ 上的一个辛结构. 特别地, 若 $\mathfrak{g}$ 上存在一个线性函数 f, 使得 $\mathrm{d}f(\cdot,\cdot) = f([\cdot,\cdot])$ 为 $\mathfrak{g}$ 上反对称的非退化双线性型, 则称 $\mathfrak{g}$ 为 Frobenius Lie 代数.

值得注意的是, 在 Lie 代数上同调的观点下, (Quasi-)Frobenius Lie 代数的定义是自然的: Quasi-Frobenius Lie 代数上的反对称非退化双线性型为 Lie 代数 2-上闭链; Frobenius Lie 代数上的反对称非退化双线性型为 Lie 代数 2-上边缘链 [33].

另外, 从 Lie 代数表示的角度看, $\mathfrak{g}$ 为 Frobenius Lie 代数当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的余伴随表示可由一个元生成, 即 $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})(f) = \mathfrak{g}^*,\ f \in \mathfrak{g}^*$. 这些事实表明, Frobenius Lie 代数是 Lie 代数中一类不可忽视的研究对象, 具有相当重要的研究价值.

除 Lie 代数领域外, (Quasi-)Frobenius Lie 代数在形变与量子群理论中也起着关键作用. 例如, 考虑复数域上的单 Lie 代数 L 及其 Quasi-Frobenius 子代数 $\mathfrak{g}$, ω 为 $\mathfrak{g}$ 上的一个非退化 2-上闭链, 设 ω 在 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 下矩阵表示为 $M = (r_{ij})_{1\le i,j\le n}$, 则 $R = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (M^{-1})_{ij} x_i \wedge x_j$ 为经典 Yang-Baxter 方程 $[R^{12},R^{13}] + [R^{12},R^{23}] + [R^{13},R^{23}] = 0,\ R \in \bigwedge^2 L$ 的一个反对称解; 反之, 若已知 $R \in \bigwedge^2 L$ 为经典 Yang-Baxter 方程的一个反对称解, 取 L 的一个极大子代数 $\mathfrak{g}$ 使得 R 在 $\mathfrak{g}$ 上非退化, 设 R 在 $\mathfrak{g}$ 的一组基下 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 下矩阵表示为 $M = (r_{ij})_{1\le i,j\le n}$, 则 $\omega(x_i,x_j) = (M^{-1})_{ij}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的非退化 2-上闭链 [20]. 因此, 求解经典 Yang-Baxter 方程的问题可转化为寻找单 Lie 代数的 Quasi-Frobenius 子代数的问题.

综上所述, Frobenius Lie 代数具有深刻的数学、物理背景; 研究 Frobenius Lie 代数的结构与分类问题既体现了纯粹的数学趣味, 也有助于进一步理解物理中的经典 Yang-Baxter 方程. 本文将以此为宗旨和目的, 深入讨论一类 Frobenius Lie

代数的结构与分类.

1.2 研究现状

事实上, 关于结合 Frobenius 代数的研究可追溯至 20 世纪 30 年代, 彼时 Richard Brauer 与 Cecil Nesbitt 师徒二人以德国大数学家 Ferdinand Frobenius 的姓命名了一类域上具有非退化结合双线性型的有限维含幺结合代数 [6]. 随后, Tadashi Nakayama[26, 27] 和 Jean Dieudonné[17] 等人丰富了结合 Frobenius 代数的相关理论, 并做了很多推广工作.

1980 年, 受 G. B. Seligman 的建议, 比利时人 Alfons I. Ooms 类比结合 Frobenius 代数的概念而提出了 Frobenius Lie 代数的定义. Ooms 利用泛包络代数等工具研究了 Frobenius Lie 代数的特征结构, 并给出了形如 $\mathfrak{h} \ltimes V$ $(\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{C}} V)$ 的 Lie 代数成为 Frobenius Lie 代数的等价条件 [28].

在此基础上, A. G. Èlashvili 对一类具有特殊 Levi 分解的 Frobenius Lie 代数进行了分类, 并进一步给出了直至 6 维的 Frobenius 代数 Lie 代数的分类 [19]. 2007 年, Balázs Csikós 与 László Verhóczki 在低维 Frobenius Lie 代数的研究上更进一步, 他们解决了特征非 2 的域上 4 维 Frobenius Lie 代数与特征为 0 的代数闭域上 6 维 Frobenius Lie 代数的分类问题 [14].

2009 年, Murray Gerstenhaber 与 Anthony Giaquinto 发现单 Lie 代数的饱和 Frobenius 子代数的主元素是半单元, 且特征子空间分解不依赖于半单元的选取; 并且对于一类特别的 Frobenius 函数, 他们给出了具体的求特征值和特征向量的方法 [21]. 2014 年, Andre Diatta 与 Bakery Manga 证明了任何具有 LSA 结构的 Lie 代数 (例如 Frobenius Lie 代数) 可以嵌入某个 $\mathfrak{sl}_n$ 中, 从而推广了 M. Gerstenhaber 与 A. Giaquinto 的部分结果, 同时也意味着在 $\mathfrak{sl}_n$ 中经典 Yang-Baxter 方程解的分类可直接推出 Frobenius Lie 代数的分类 [16].

一些特殊的 Frobenius Lie 代数是近年研究的热点. 2000 年, 为计算一般 Seaweed Lie 代数的指标, Vladimir Dergachev 与 Alexandre Kirillov 引入了 Meander 图的概念, 从而将一个纯代数问题转化为了组合图论问题 [15]. 特别地, Frobenius Seaweed Lie 代数 (即指标为 0 的 Seaweed Lie 代数) 的许多信息可从其对应的 Meander 图上获得. 2011 年以来, Vincent Coll 等人对 Frobenius Seaweed Lie 代数对应的 Meander 图展开了深入研究 [9–11], 并证明了 A,B,C,D-型 Frobenius Seaweed Lie 代数的特征值都是关于 $\frac{1}{2}$ 对称的连续整数 [7, 12].

2018 年，M. A. Alvarez, M. C. Rodrıguez-Vallarte 与 G. Salgado 研究了具有交换幂零根理想的可解 Frobenius Lie 代数, 发现这种 Frobenius Lie 代数在复数

域上不可能表示为双扩张 (即中心扩张加导子扩张) 的形式, 而在实数域上除两种情形外均可表示为双扩张的形式 [1].

从扩张的观点看, Frobenius Lie 代数与所谓的 Contact Lie 代数不可分割. 2019 年, T. Barajas, E. Roque 和 Gil Salgado 在一般 Lie 代数上引入了关于某线性函数的主导子概念, 并证明了任何 Frobenius Lie 代数均可实现为它的某个余一维 Contact 理想的内主导子扩张; 反之, 他们也证明了中心非平凡的 Contact Lie 代数具有余一维的 Frobenius 理想当且仅当这是一个中心扩张 [5]. 因此, Frobenius Lie 代数的分类问题与 Contact Lie 代数的分类问题联系紧密.

此外, 与对 (Quasi-)Frobenius Lie 代数的研究同时兴起的, 是对经典 Yang-Baxter 方程解的研究. 1980 年, A. G. Kuliš 与 E. K. Skljanin 的文章 Solutions of the Yang-Baxter equation 是对该问题第一次系统的论述 [24]. 随后, V. G. Drinfeld 与 A. A. Belavin 研究了单 Lie 代数上的 Yang-Baxter 方程, 并给出了可用椭圆函数或三角函数表达的解的一般形式 [18].

20 世纪 90 年代初, A. Stolin 在 $\mathfrak{sl}_2$ 和 $\mathfrak{sl}_3$ 上给出了 Yang-Baxter 方程的全部解 [31], 并在 $\mathfrak{sl}_n$ 上解决了 Drinfeld 关于 Yang-Baxter 方程有理解的猜想 [32]; Stolin 也注意到单 Lie 代数上经典 Yang-Baxter 方程的有理解与一类 Quasi-Frobenius 子代数的分类密切相关. 后续很多的数学工作者都在这一领域作出了令人瞩目的贡献.

1.3 本文主要工作

在本文中, 我们始终固定一个特征为 0 的代数闭域. 为方便起见, 所有的讨论均在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行.

本文主要研究的是一类 Frobenius Lie 代数的结构与分类问题, 主要方法是考虑其主元素伴随作用的特征子空间分解.

具体地说, 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius Lie 代数, $\mathrm{d}f(\cdot,\cdot) = f([\cdot,\cdot])$ 为 $\mathfrak{g}$ 上反对称的非退化双线性型, 则称 f 为 $\mathfrak{g}$ 上的 Frobenius 函数. 由于 f 诱导了一个典范的同构

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}^*, \\ x &\longmapsto f([x,\cdot]) \end{aligned}$$

则存在唯一的 $x_f \in \mathfrak{g}$ 使得 $f \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x_f = f$, 称为 f 对应的主元素.

不难看出 [28, 命题 3.1], 若 f_1, f_2 均为 $\mathfrak{g}$ 上的 Frobenius 函数，则存在 $\varphi \in$

$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 使得 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_{f_2}=\varphi\circ\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_{f_1}\circ\varphi^{-1}$, 故 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f$ 的特征值与 Frobenius 函数 f 的选取无关. 我们考虑 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f$ 作用的根子空间分解 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}}\mathfrak{g}_\alpha$, 其中属于特征值 $\alpha\in\mathbb{C}$ 的根子空间为 $\mathfrak{g}_\alpha=\{x\in\mathfrak{g}\colon \exists m\geq 1,\ s.t.\ (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f-\alpha\cdot\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^m(x)=0\}$, 具有以下性质 [28, 引理 3.2, 定理 3.3, 推论 3.4]:

- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C},\ [\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$;
- $\forall\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{1\},\ \mathfrak{g}_\alpha\subseteq\ker f$;
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\,(\alpha+\beta\neq 1),\ \mathrm{d}f(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta)=0$;
- $\forall\alpha\in\mathbb{C},\ \mathfrak{g}_\alpha$ 与 $\mathfrak{g}_{1-\alpha}$ 在 $\mathrm{d}f(\cdot,\cdot)$ 下互为对偶空间.

特别地, 由于 $x_f\in\mathfrak{g}_0$, $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_0=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_1\geq 1$. 另外, 由 $\mathrm{d}f(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的反对称非退化性知, $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ 为偶数, 则 $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_{1/2}=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}-\sum_{\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{1/2\}}\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_\alpha$ 为偶数.

记 $\mathfrak{g}_{\neq 0}=\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}\mathfrak{g}_\alpha$, 注意在一般情况下, $\mathfrak{g}_{\neq 0}$ 未必是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 作为替代, 记 $\mathfrak{a}=\{x\in\mathfrak{g}\colon \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x)=0\}$, 由于 $\mathfrak{g}_{\neq 0}$ 中元均为幂零元, 则 $\mathfrak{g}_{\neq 0}\subseteq\mathfrak{a}$. 另外显然有 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{a}$. 一个重要的观察是, $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个余一维特征理想 [28, 定理 3.3]. 由于 $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f)=\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$, 则 $x_f\notin\mathfrak{a}$, 故 $\mathfrak{g}=\mathbb{C}x_f\ltimes\mathfrak{a}$, 即 $\mathfrak{g}$ 可视为在 $\mathfrak{a}$ 上由导子 $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f)\big|_{\mathfrak{a}}$ 扩张得到. 尽管 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f$ 一般不可对角化, 但由以下的形变方法 [34, 定理 6.1] 知, 我们仍可不妨设 x_f 为半单元:

由于 $Z(\mathfrak{g})\subseteq\mathrm{Rad}(\mathrm{d}f)=\{0\}$, 则存在 Lie 代数嵌入 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\colon\mathfrak{g}\xrightarrow{\cong}\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. 现将 x_f 等同于 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, 并做 Jordan 分解 $x_f=x_s+x_n$, 其中 $x_s\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 为半单部分, $x_n\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 为幂零部分, 且 $[x_s,x_n]=0$ [22, 命题 4.2]. 事实上, 由 $x_f\in\mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ 知, $x_s,x_n\in\mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ [22, 引理 4.2B].

由 $x_f\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 非幂零知, $x_s\neq 0$. 若 $x_n=0$, 则 $x_f=x_s$ 即为半单元; 若 $x_n\neq 0$, 则令 $\widetilde{\mathfrak{g}}=(\mathbb{C}x_s\oplus\mathbb{C}x_n)\ltimes\mathfrak{a}$, 故 $\mathfrak{g}\subseteq\widetilde{\mathfrak{g}}$, 且 $\dim_{\mathbb{C}}\widetilde{\mathfrak{g}}=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}+1$ 为奇数. 现取 $\mathfrak{g}$ 上 Frobenius 函数 f 到 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 上的任一个线性延拓 $\widetilde{f}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*$. 由 $\widetilde{f}\big|_{\mathfrak{g}}=f$ 知, $(\mathrm{d}\widetilde{f})\big|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}}$ 非退化, 再由 $\mathrm{d}\widetilde{f}$ 的反对称性以及 $\dim_{\mathbb{C}}\widetilde{\mathfrak{g}}$ 为奇数知, $\mathrm{rank}(\mathrm{d}\widetilde{f})=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$. 计算 $\forall\alpha\in\mathbb{C}$,

$$\widetilde{f}([x_n,\mathfrak{g}_\alpha])=\widetilde{f}([x_f,\mathfrak{g}_\alpha])-\widetilde{f}([x_s,\mathfrak{g}_\alpha])=f([x_f,\mathfrak{g}_\alpha])-\alpha\widetilde{f}(\mathfrak{g}_\alpha)=(1-\alpha)f(\mathfrak{g}_\alpha)=0.$$

由 $\mathfrak{g}=\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}}\mathfrak{g}_\alpha$ 知, $\widetilde{f}([x_n,\mathfrak{g}])=0$. 又 $\widetilde{f}([x_n,x_s])=0$, 故 $\widetilde{f}([x_n,\widetilde{\mathfrak{g}}])=0$, 即 $x_n\in\mathrm{Rad}(\mathrm{d}\widetilde{f})$. 因此 $\mathrm{Rad}(\mathrm{d}\widetilde{f})=\mathbb{C}x_n$.

现令 $\mathfrak{g}(t)=\mathbb{C}(x_s+tx_n)\ltimes\mathfrak{a},\ t\in\mathbb{C}$, 则 $\widetilde{\mathfrak{g}}=\mathbb{C}x_n\ltimes\mathfrak{g}(t)$. 由 $\mathrm{Rad}(\mathrm{d}\widetilde{f})=\mathbb{C}x_n$ 知, $(\mathrm{d}\widetilde{f})\big|_{\mathfrak{g}(t)\times\mathfrak{g}(t)}$ 非退化, 即 $(\mathfrak{g}(t),\mathrm{d}\widetilde{f}\big|_{\mathfrak{g}(t)})$ 为 Frobenius Lie 代数. 注意 $(\mathfrak{g},\mathrm{d}f)$ 与 $(\mathfrak{g}(t),\mathrm{d}\widetilde{f}\big|_{\mathfrak{g}(t)})$ 之间仅存在保持 Frobenius 结构的线性空间同构, 而不为 Lie 代数同构. 特别地, 取 $t=0$, 则 $\mathfrak{g}(0)$ 中主元素为 x_s, 这是一个半单元.

在上述过程中, 我们已将任意一个 Frobenius Lie 代数转化为具有半单主元素的 Frobenius Lie 代数, 事实上这一过程是多对一的满射. 并且, 给定具有半单主元素的 Frobenius Lie 代数 $(\mathfrak{g}(0), \mathrm{d}f_0)$, 记为 $\mathfrak{g}(0) = \mathbb{C}x_s \ltimes \mathfrak{a}$, 则任取 $x_n \in \{D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})\colon [x_s, D] = 0\}$, 令 $\mathfrak{g} = \mathbb{C}(x_s + x_n) \ltimes \mathfrak{a}$, $f\big|_{\mathfrak{a}} = f_0\big|_{\mathfrak{a}}$ 且 $f(x_s + x_n) = f_0(x_s)$, 则 $(\mathfrak{g}, \mathrm{d}f)$ 仍为 Frobenius Lie 代数, 且与 $(\mathfrak{g}_0, \mathrm{d}f_0)$ 之间存在保持 Frobenius 结构的线性空间同构 (不为 Lie 代数同构). 因此由前述的形变过程, 我们只需考虑主元素是半单元的情形即可.

现在考虑 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f$ 作用的特征子空间分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{\alpha\in\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha$, 其中属于特征值 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的特征子空间为 $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}\colon [x_f, x] = \alpha x\}$, 并将 $\mathfrak{g}_\alpha$ 中的元习惯记为 x_α. 此时 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的半单内导子, 限制在 $\mathfrak{a}$ 上为半单外导子; 特别地, 若 $\mathfrak{g}_{\neq 0}$ 为子代数, 则 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f$ 限制在 $\mathfrak{g}_{\neq 0}$ 上为可逆半单外导子.

本文主要试图解决以下几个问题:

- 若 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f$ 的特征值只有 0 和 1, 则 $\mathfrak{g}$ 的结构如何?
- 若 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_0 = 1$, 则 $\mathfrak{g}$ 的结构如何?
- 若 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_0 = 1$, 或者 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f$ 的特征子空间都是一维的, 则低维的 $\mathfrak{g}$ 可以如何分类?

第二章　$(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数的结构

2.1　$(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数的标准型

定义 2.1　设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius Lie 代数, x_f 为其半单的主元素, 在 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f$ 作用下存在特征子空间分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$, 且 $\mathfrak{g}_0$ 为 Abel Lie 代数, 则称 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数.

定义 2.2　设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数, 若 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{d}f)$ 不能写成若干个相容的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 子代数的直和, 则称 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{d}f)$ 为不可分解的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数.

命题 2.3　$\mathbb{C}$ 上的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数总可写成不可分解的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数的直和, 其中每个直和项都形如 $\mathfrak{h}\ltimes V$, 满足 $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}=\dim_{\mathbb{C}}V=n$, 且 $\mathfrak{h}$ 存在一组由 $(n-1)$ 个可交换的幂零矩阵与一个单位阵组成的基.

定理 2.4　设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上不可分解的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数, 则可选取 $\mathfrak{g}_1$ 的一组基 $\{y_1,\cdots,y_n\}$, 以及 $\mathfrak{g}_0$ 的相应一组基 $\{x_1,\cdots,x_n\}$, 满足 $\mathrm{d}f(x_i,y_j)=\delta_{ij}$, 且在 $\mathfrak{g}_0\subseteq\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ 的意义下, $\mathfrak{g}_0$ 的一组基 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 具有以下的矩阵表示形式:

$$
\begin{gathered}
x_1=I_n,\ x_2=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ &0&*&\cdots&*\\ &&\ddots&\ddots&\vdots\\ &&&\ddots&*\\ &&&&0\end{pmatrix},\ x_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0&\cdots&0\\ &0&0&*&\cdots&*\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ &&&\ddots&\ddots&*\\ &&&&\ddots&0\\ &&&&&0\end{pmatrix},\cdots,\\
x_{n-1}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1&0\\ &0&\cdots&\cdots&0&*\\ &&\ddots&&\vdots&0\\ &&&\ddots&\vdots&\vdots\\ &&&&0&0\\ &&&&&0\end{pmatrix},\ x_n=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\ &0&\cdots&0&0\\ &&\ddots&\vdots&\vdots\\ &&&0&0\\ &&&&0\end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

其中阴影部分中元存在以下关系: 记 $[x_i,y_j]=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{lj}^{(i)}y_l,\ a_{lj}^{(i)}\in\mathbb{C}$, 则

$$
\forall 1\le i,j,k,l,m\le n,\ \sum_{l=1}^{n}a_{lj}^{(k)}a_{ml}^{(i)}=\sum_{l=1}^{n}a_{lj}^{(i)}a_{ml}^{(k)}. \tag{2.2}
$$

特别地, x_k 的第 i 行等于 x_i 的第 k 行.

2.2 命题 2.3 的证明

设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数, x_f 为其半单的主元素. 设 $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_0=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_1=n\geq 1$, $\mathfrak{g}_0$ 在 $\mathbb{C}$ 上的一组基为 $\{x_1,\cdots,x_n\}$, $\mathfrak{g}_1$ 在 $\mathbb{C}$ 上的一组基为 $\{y_1,\cdots,y_n\}$, 则 $\mathrm{d}f(\cdot,\cdot)$ 的非退化性等价于 $\det(f([x_i,y_j]))_{1\leq i,j\leq n}\neq 0$.

不难发现, $\mathfrak{g}_0$ 可视为 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ 的子代数, 且进一步 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)\cong\mathfrak{g}_0\oplus\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_1,\ker(f\big|_{\mathfrak{g}_1}))$. 由 $\mathfrak{g}_0$ 为 Abel 子代数知, 此时 $\mathfrak{g}$ 为可解 Lie 代数, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}_1$ 为 Abel 理想, 因此 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\ltimes\mathfrak{g}_1$ 是二步可解的 Lie 代数.

我们的基本想法是: 在 $\mathfrak{g}_1$ 的一组基 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 下, 适当选取 $\mathfrak{g}_0\subseteq\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ 的一组基, 使其具有比较好的矩阵形式.

引理 2.5 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数, 则可选取 $\mathfrak{g}_1$ 的一组基, 使得 $\mathfrak{g}_0$ 中元在这组基下的矩阵表示具有相同的准对角分块形式, 在每个对角块内都是上三角的且只有一个特征值.

证明: 先固定 $x_1=x_f=\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}$, 并选取 $x_2\in\mathfrak{g}_0\setminus\mathbb{C}x_1$, 使得 x_2 在 $\mathfrak{g}_0$ 的元中具有最多的互异特征值. 在 $\mathfrak{g}_1$ 的一组基 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 下, 设 x_2 的矩阵表示形如:

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\lambda_1^{(2)} & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1^{(2)}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\lambda_s^{(2)} & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s^{(2)}\end{pmatrix}\right),$$

其中 $\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_s^{(2)}$ 两两不同. 注意 $\mathfrak{g}_0$ 中元均与 x_2 可交换, 由线性代数知, 在这组基下任意 $\mathfrak{g}_0$ 中元均具有与 x_2 相同的准对角分块形式.

现在考虑其中任意一个对角块: 由于 $\mathfrak{g}_0$ 中元限制在这个对角块上均可上三角化, 又两两可交换, 故由线性代数知, 它们限制在这个对角块上可同时上三角化. 因此我们可以选取 $\mathfrak{g}_1$ 的一组基 $\{y_1,\cdots,y_n\}$, 使得 $\mathfrak{g}_0$ 中元的矩阵表示均形如:

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\ddots & * \\ & \ddots\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\ddots & * \\ & \ddots\end{pmatrix}\right).$$

此时我们断言: 任意 $\mathfrak{g}_0$ 中元在每个对角块内也只有一个特征值, 在不同的对角块内特征值可能不同.

事实上, 假设存在 $x'\in\mathfrak{g}_0$, 使得 x' 在某个对角块内有两个不同的特征值. 考虑 x_2 的扰动 x_2+tx' $(t\in\mathbb{C})$: 我们总可以适当选取 $t\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 使得 x_2+tx' 在上述对角块内有两个不同的特征值, 且在不同的对角块内特征值不同. 这样 x_2+tx' 的互异特征值数量就比 x_2 多, 这与 x_2 的选取矛盾!

以下归纳要求 $\forall 3 \le i \le n,\ x_i \in \mathfrak{g}_0 \setminus (\mathbb{C}x_1 + \cdots + \mathbb{C}x_{i-1})$ 在 $\mathfrak{g}_0 \setminus (\mathbb{C}x_1 + \cdots + \mathbb{C}x_{i-1})$ 的元中具有最多的互异特征值. 于是我们可以选取 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 具有以下的矩阵表示:

$$x_1 = I_n,\ x_2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(2)} & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1^{(2)} \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} \lambda_s^{(2)} & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s^{(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \cdots,\ x_n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(n)} & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1^{(n)} \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} \lambda_s^{(n)} & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s^{(n)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

□

注 2.6 为方便起见, 以下将具有一个特征值 λ 的上三角矩阵简记为 $\mathrm{UT}(\lambda)$, 将具有一个特征值 λ 的下三角矩阵简记为 $\mathrm{LT}(\lambda)$. 例如, 上述 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 简记为

$$x_1 = I_n,\ x_2 = \mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda_1^{(2)}), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda_s^{(2)})\}, \cdots, x_n = \mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda_1^{(n)}), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda_s^{(n)})\}.$$

引理 2.7 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数, 且已具有引理 2.5 中所述形式, 则 $\mathfrak{g}$ 可表示为不可分解的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数的直和, 其中每个直和项对应引理 2.5 中的一个对角块.

证明: 我们分三步完成这个过程:

第一步: 先考虑第一个对角块对应的不变子空间 V_1. 设 V_1 的一组基为 $\{y_1, \cdots, y_k\}$, 使得 $\left\{x_1\big|_{V_1}, \cdots, x_n\big|_{V_1}\right\}$ 在这组基下的矩阵表示为

$$x_1\big|_{V_1} = I_k,\ x_2\big|_{V_1} = \mathrm{UT}(\lambda_1^{(2)}), \cdots, x_n\big|_{V_1} = \mathrm{UT}(\lambda_1^{(n)}).$$

现考虑 $\mathfrak{g}_0$ 在 V_1^* 上的对偶作用, 设 V_1^* 的一组对偶基为 $\{y_1^*, \cdots, y_k^*\}$ $(y_i^*(y_j) = \delta_{ij})$, 则 $\left\{x_1\big|_{V_1^*}, \cdots, x_n\big|_{V_1^*}\right\}$ 在这组基下的矩阵表示为

$$x_1\big|_{V_1} = I_k,\ x_2\big|_{V_1} = \mathrm{LT}(\lambda_1^{(2)}), \cdots, x_n\big|_{V_1} = \mathrm{LT}(\lambda_1^{(n)}).$$

由 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \ltimes \mathfrak{g}_1$ 的 Frobenius 性以及 $\mathfrak{g}_0$ 的交换性知, $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0)\left(f\big|_{\mathfrak{g}_1}\right) = \mathfrak{g}_1^*$. 而在 $\mathfrak{g}_0$ 的对偶作用下, $\mathfrak{g}_1^*$ 可分解为不变子空间的直和, 其中第一个为 V_1^*, 则 $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0)\left(f\big|_{V_1}\right) = V_1^*$, 故可不妨设 $\left\{x_1\big|_{V_1^*}\left(f\big|_{V_1}\right), \cdots, x_k\big|_{V_1^*}\left(f\big|_{V_1}\right)\right\}$ 为 V_1^* 的一组基.

此时 $\left\{x_{k+1}\big|_{V_1^*}\left(f\big|_{V_1}\right), \cdots, x_n\big|_{V_1^*}\left(f\big|_{V_1}\right)\right\}$ 均可表示为 $\left\{x_1\big|_{V_1^*}\left(f\big|_{V_1}\right), \cdots, x_k\big|_{V_1^*}\left(f\big|_{V_1}\right)\right\}$ 的线性组合, 记为

$$x_i\big|_{V_1^*}\left(f\big|_{V_1}\right) = \sum_{l=1}^{k} c_l^{(i)} x_l\big|_{V_1^*}\left(f\big|_{V_1}\right),\ \forall k+1 \le i \le n.$$

令 $x'_i = x_i - \sum\limits_{l=1}^{k} c_l^{(i)} x_l,\ \forall k+1 \le i \le n$, 则 $x'_i\big|_{V_1^*}\big(f\big|_{V_1}\big) = 0,\ \forall k+1 \le i \le n$, 且 $\{x_1, \cdots, x_k, x'_{k+1}, \cdots, x'_n\}$ 仍为 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基. 由交换性知, $\forall k+1 \le i \le n,\ \forall 1 \le l \le k$, $x'_i\big|_{V_1^*}\Big(x_l\big|_{V_1^*}\big(f\big|_{V_1}\big)\Big) = x_l\big|_{V_1^*}\Big(x'_i\big|_{V_1^*}\big(f\big|_{V_1}\big)\Big) = 0$, 则 $x'_i\big|_{V_1^*} = 0,\ \forall k+1 \le i \le n$.

因此 $\left\{x_1\big|_{V_1^*}, \cdots, x_k\big|_{V_1^*}, x'_{k+1}\big|_{V_1^*}, \cdots, x'_n\big|_{V_1^*}\right\}$ 的矩阵表示为

$$x_1\big|_{V_1^*} = -I_k,\ x_2\big|_{V_1^*} = -\mathrm{LT}(\lambda_1^{(2)}), \cdots, x_k\big|_{V_1^*} = -\mathrm{LT}(\lambda_1^{(k)}), x'_{k+1}\big|_{V_1^*} = \cdots = x'_n\big|_{V_1^*} = 0,$$

即 $\left\{x_1\big|_{V_1}, \cdots, x_k\big|_{V_1}, x'_{k+1}\big|_{V_1}, \cdots, x'_n\big|_{V_1}\right\}$ 的矩阵表示为

$$x_1\big|_{V_1} = I_k,\ x_2\big|_{V_1} = \mathrm{UT}(\lambda_1^{(2)}), \cdots, x_k\big|_{V_1} = \mathrm{UT}(\lambda_1^{(k)}), x'_{k+1}\big|_{V_1} = \cdots = x'_n\big|_{V_1} = 0,$$

即 $\left\{x_1, \cdots, x_k, x'_{k+1}, \cdots, x'_n\right\}$ 的矩阵表示为

$$x_1 = I_n,\ x_2 = \mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda_1^{(2)}), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda_s^{(2)})\}, \cdots, x_k = \mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda_1^{(k)}), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda_s^{(k)})\},$$
$$x'_{k+1} = \mathrm{diag}\{0, \mathrm{UT}(\lambda'^{(k+1)}_2), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda'^{(k+1)}_s)\}, \cdots, x'_n = \mathrm{diag}\{0, \mathrm{UT}(\lambda'^{(n)}_2), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda'^{(n)}_s)\},$$

其中 $\forall k+1 \le i \le n,\ \forall 2 \le j \le s,\ \lambda'^{(i)}_j = \lambda_j^{(i)} - \sum\limits_{l=1}^{k} c_l^{(i)} \lambda_j^{(l)}$.

第二步: 再考虑其余对角块对应的不变子空间之和 V_2. 设 V_2 的一组基为 $\{y_{k+1}, \cdots, y_n\}$, 使得 $\left\{x_1\big|_{V_2}, \cdots, x_k\big|_{V_2}, x'_{k+1}\big|_{V_2}, \cdots, x'_n\big|_{V_2}\right\}$ 在这组基下的矩阵表示为

$$x_1\big|_{V_2} = I_{n-k},\ x_2\big|_{V_2} = \mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda_2^{(2)}), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda_s^{(2)})\}, \cdots, x_k\big|_{V_2} = \mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda_2^{(k)}), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda_s^{(k)})\},$$
$$x'_{k+1}\big|_{V_2} = \mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda'^{(k+1)}_2), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda'^{(k+1)}_s)\}, \cdots, x'_n\big|_{V_2} = \mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda'^{(n)}_2), \cdots, \mathrm{UT}(\lambda'^{(n)}_s)\}.$$

注意 $0 \ne \det(f([x_i, y_j]))_{1\le i,j\le n} = \det\begin{pmatrix} (f([x_i, y_j]))_{1\le i,j\le k} & (f([x_i, y_j]))_{\substack{1\le i\le k\\ k+1\le j\le n}} \\ 0 & (f([x'_i, y_j]))_{k+1\le i,j\le n} \end{pmatrix}$,
则 $\det(f([x_i, y_j]))_{1\le i,j\le k} \ne 0,\ \det(f([x'_i, y_j]))_{k+1\le i,j\le n} \ne 0$, 故

$$\mathfrak{b}_1 := \left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{x_1\big|_{V_1}, \cdots, x_k\big|_{V_1}\right\} \ltimes V_1, \mathrm{d}f\big|_{V_1}\right),\ \mathfrak{b}_2 := \left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{x'_{k+1}\big|_{V_2}, \cdots, x'_n\big|_{V_2}\right\} \ltimes V_2, \mathrm{d}f\big|_{V_2}\right)$$

均为 Frobenius 子代数.

现考虑 $\mathfrak{g}_0$ 在 V_2^* 上的对偶作用, 设 V_2^* 的一组对偶基为 $\{y_{k+1}^*, \cdots, y_n^*\}$ $(y_i^*(y_j) = \delta_{ij})$, 则 $\left\{x_1\big|_{V_2^*}, \cdots, x_k\big|_{V_2^*}, x'_{k+1}\big|_{V_2^*}, \cdots, x'_n\big|_{V_2^*}\right\}$ 在这组基下的矩阵表示为

$$x_1\big|_{V_2^*} = -I_{n-k},\ x_2\big|_{V_2^*} = -\mathrm{diag}\{\mathrm{LT}(\lambda_2^{(2)}), \cdots, \mathrm{LT}(\lambda_s^{(2)})\}, \cdots, x_k\big|_{V_2^*} = -\mathrm{diag}\{\mathrm{LT}(\lambda_2^{(k)}), \cdots, \mathrm{LT}(\lambda_s^{(k)})\},$$
$$x'_{k+1}\big|_{V_2^*} = -\mathrm{diag}\{\mathrm{LT}(\lambda'^{(k+1)}_2), \cdots, \mathrm{LT}(\lambda'^{(k+1)}_s)\}, \cdots, x'_n\big|_{V_2^*} = -\mathrm{diag}\{\mathrm{LT}(\lambda'^{(n)}_2), \cdots, \mathrm{LT}(\lambda'^{(n)}_s)\}.$$

由 $\mathfrak{b}_2 := \left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{x'_{k+1}\big|_{V_2},\cdots,x'_n\big|_{V_2}\right\}\ltimes V_2, \mathrm{d}f\big|_{V_2}\right)$ 为 Frobenius 子代数知, $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{b}_2}(\mathfrak{b}_2)\left(f\big|_{V_2}\right)=V_2^*$, 故 $\left\{x'_{k+1}\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right),\cdots,x'_n\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right)\right\}$ 为 V_2^* 的一组基.

又类似知 $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{g}_0)\left(f\big|_{V_2}\right) = V_2^*$, 则 $\left\{x_1\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right),\cdots,x_k\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right)\right\}$ 均可表示为 $\left\{x'_{k+1}\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right),\cdots,x'_n\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right)\right\}$ 的线性组合, 记为

$$x_i\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right)=\sum_{l=k+1}^{n} d_l^{(i)}x'_l\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right),\ \forall 1\leq i\leq k.$$

令 $x'_i = x_i-\sum\limits_{l=k+1}^{n} d_l^{(i)}x'_l,\ \forall 1\leq i\leq k$, 则 $x'_i\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right)=0,\ \forall 1\leq i\leq k$, 且 $\{x'_1,\cdots,x'_n\}$ 仍为 $\mathfrak{g}_0$ 的一组基. 由交换性知, $\forall 1\leq i\leq k,\ \forall k+1\leq l\leq n$, $x'_i\big|_{V_2^*}\left(x'_l\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right)\right)=x'_l\big|_{V_2^*}\left(x'_i\big|_{V_2^*}\left(f\big|_{V_2}\right)\right)=0$, 则 $x'_i\big|_{V_2^*}=0,\ \forall 1\leq i\leq k$.

因此 $\left\{x'_1\big|_{V_2^*},\cdots x'_n\big|_{V_2^*}\right\}$ 的矩阵表示为

$$x'_1\big|_{V_2^*}=\cdots=x'_k\big|_{V_2^*}=0,$$
$$x'_{k+1}\big|_{V_2^*}=-\mathrm{diag}\{\mathrm{LT}(\lambda'^{(k+1)}_2),\cdots,\mathrm{LT}(\lambda'^{(k+1)}_s)\},\cdots,x'_n\big|_{V_2^*}=-\mathrm{diag}\{\mathrm{LT}(\lambda'^{(n)}_2),\cdots,\mathrm{LT}(\lambda'^{(n)}_s)\},$$

即 $\left\{x'_1\big|_{V_2},\cdots x'_n\big|_{V_2}\right\}$ 的矩阵表示为

$$x'_1\big|_{V_2}=\cdots=x'_k\big|_{V_2}=0,$$
$$x'_{k+1}\big|_{V_2}=\mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda'^{(k+1)}_2),\cdots,\mathrm{UT}(\lambda'^{(k+1)}_s)\},\cdots,x'_n\big|_{V_2}=\mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda'^{(n)}_2),\cdots,\mathrm{UT}(\lambda'^{(n)}_s)\},$$

即 $\left\{x'_1,\cdots,x'_n\right\}$ 的矩阵表示为

$$x'_1=\mathrm{diag}\{I_k,0,\cdots,0\},\ x'_2=\mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda'^{(2)}_1),0,\cdots,0\},\cdots,x'_k=\mathrm{diag}\{\mathrm{UT}(\lambda'^{(k)}_1),0\cdots,0\},$$
$$x'_{k+1}=\mathrm{diag}\{0,\mathrm{UT}(\lambda'^{(k+1)}_2),\cdots,\mathrm{UT}(\lambda'^{(k+1)}_s)\},\cdots,x'_n=\mathrm{diag}\{0,\mathrm{UT}(\lambda'^{(n)}_2),\cdots,\mathrm{UT}(\lambda'^{(n)}_s)\}.$$

注意 $0\neq\det(f([x_i,y_j]))_{1\leq i,j\leq n}=\det\begin{pmatrix}(f([x'_i,y_j]))_{1\leq i,j\leq k} & 0\\ 0 & (f([x'_i,y_j]))_{k+1\leq i,j\leq n}\end{pmatrix}$, 则 $\det(f([x'_i,y_j]))_{1\leq i,j\leq k}\neq 0,\ \det(f([x'_i,y_j]))_{k+1\leq i,j\leq n}\neq 0$, 故

$$\mathfrak{b}'_1 := \left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{x'_1\big|_{V_1},\cdots,x'_k\big|_{V_1}\right\}\ltimes V_1,\mathrm{d}f\big|_{V_1}\right),\ \mathfrak{b}_2=\left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{x'_{k+1}\big|_{V_2},\cdots,x'_n\big|_{V_2}\right\}\ltimes V_2,\mathrm{d}f\big|_{V_2}\right)$$

均为 Frobenius 子代数，且存在 Lie 代数直和 $(\mathfrak{g},\mathrm{d}f)=\mathfrak{b}'_1\oplus\mathfrak{b}_2$.

第三步: 注意在上述过程中, $0=x'_1\big|_{V_2}=x_1\big|_{V_2}-\sum\limits_{l=k+1}^{n}d_l^{(i)}x'_l\big|_{V_2}=I_{n-k}-\sum\limits_{l=k+1}^{n}d_l^{(i)}x'_l\big|_{V_2}$, 则 $I_{n-k}=\sum\limits_{l=k+1}^{n}d_l^{(i)}x'_l\big|_{V_2}\in\mathfrak{b}_2$. 再对 $\mathfrak{b}_2$ 重复上述过程, 则 $(\mathfrak{g},\mathrm{d}f)$ 可分解为若干个

Frobenius Lie 子代数的直和. 因此以下只需限制在每个对角块上考虑即可, 且可不妨设

$$x_1 = I_n,\ x_2 = \mathrm{UT}(\lambda^{(2)}), \cdots, x_n = \mathrm{UT}(\lambda^{(n)}).$$

□

注 2.8 由引理 2.5 与引理 2.7 即得命题 2.3 的证明. 并且, 在引理 2.7 的第三步基础上, $\forall 2 \le i \le n$, 令 $x_i'' = x_i - \lambda^{(i)} x_1$, 则 $\{x_1, x_2'', \cdots, x_n''\}$ 仍然线性无关. 因此只需考虑最简情形:

$$x_1 = I_n,\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, x_n = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

2.3 定理 2.4 的证明

在最简情形 (2.3) 中, 注意 $\forall 1 \le i \le n,\ [x_i, y_1] = \delta_{i1} y_1$, 则在非退化双线性型 $\mathrm{d}f(\cdot,\cdot) = f([\cdot,\cdot])$ 下, 与 y_1 对偶的元必含有非零的 x_1 分量, 故可固定一个配对 (x_1, y_1), 并可不妨设 $\mathrm{d}f(x_1, y_1) = f(y_1) = 1$. 假设 $\exists 2 \le j \le n,\ s.t.\ f(y_j) \neq 0$, 则令 $y_j' = y_j - f(y_j) \cdot y_1$. 此时 $f(y_j') = 0$, 且 $\{y_1, y_2, \cdots, y_j', \cdots\}$ 仍然线性无关, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 在这组基下仍保持上述矩阵表示形式, 故可不妨设 $\forall 2 \le j \le n,\ f(y_j) = 0$.

由于 $f([x_1, y_2]) = f(y_2) = 0$, 则考虑与 y_2 对偶的元, $\exists 2 \le i \le n,\ s.t.\ \mathrm{d}f(x_i, y_2) \neq 0$. 通过调整 $\{x_2, \cdots, x_n\}$ 的顺序, 可不妨设 $\mathrm{d}f(x_2, y_2) \neq 0$, 故可固定一个配对 (x_2, y_2), 并可不妨设 $\mathrm{d}f(x_2, y_2) = 1$, 此时 $[x_2, y_2] = y_1$.

我们观察到：假设 $\exists 3 \le j \le n,\ s.t.\ \mathrm{d}f(x_2, y_j) \neq 0$, 即 $[x_2, y_j]$ 含有 $\mathrm{d}f(x_2, y_j) \cdot y_1$ 分量, 则令 $y_j' = y_j - \mathrm{d}f(x_2, y_j) \cdot y_2$. 此时 $\mathrm{d}f(x_2, y_j') = 0$, 且 $\{y_1, y_2, \cdots, y_j', \cdots\}$ 仍然线性无关, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 在这组基下仍保持上述矩阵表示形式, 故可不妨设 $\forall 3 \le j \le n,\ \mathrm{d}f(x_2, y_j) = 0$. 现在 x_2 的矩阵表示形如：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & * & \cdots & * \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

再将 $x_i\,(3 \le i \le n)$ 减去 x_2 的适当倍数, 可设 $x_i\,(3 \le i \le n)$ 的矩阵表示中 $(1,2)$ 位置均为 0. 以下再对 $\{x_3, \cdots, x_n\}$ 逐个重复上述过程, 即知 $x_i\,(3 \le i \le n)$ 的矩阵表示形如:

$$
x_3=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
 & 0 & 0 & * & \cdots & *\\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
 & & & \ddots & \ddots & *\\
 & & & & \ddots & 0\\
 & & & & & 0
\end{pmatrix},\cdots,x_{n-1}=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\
 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & *\\
 & & \ddots & & \vdots & 0\\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots\\
 & & & & 0 & 0\\
 & & & & & 0
\end{pmatrix},\ x_n=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\
 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
 & & \ddots & \vdots & \vdots\\
 & & & 0 & 0\\
 & & & & 0
\end{pmatrix}.
$$

进一步地, 记 $[x_i,y_j]=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{lj}^{(i)}y_l,\ a_{lj}^{(i)}\in\mathbb{C}$, 考虑一组非平凡的 Jacobi 等式

$$[[x_i,y_j],x_k]+[[y_j,x_k],x_i]+[[x_k,x_i],y_j]=0,\ \forall 1\le i,j,k\le n$$

代入并由 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 的线性无关性知, $\forall 1\le i,j,k,l,m\le n,\ \sum\limits_{l=1}^{n}a_{lj}^{(k)}a_{ml}^{(i)}=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{lj}^{(i)}a_{ml}^{(k)}$, 这等价于 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的伴随作用两两可交换, 因此上述矩阵表示的阴影部分信息完全由以上等式刻画. 特别地, 取 $m=1$, 结合 $\forall 1\le i,l\le n,\ a_{1l}^{(i)}=\delta_{il}$ 知, $\forall 1\le i,j,k\le n,\ a_{ij}^{(k)}=a_{kj}^{(i)}$, 此即 x_k 的第 i 行等于 x_i 的第 k 行.

2.4 关于进一步约化标准型的评注

对于 $\mathbb{C}$ 上的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数, 命题 2.3 与定理 2.4 给出了较为清晰的结构刻画. 同时, 由准备工作中的过程知, 任意 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数都可以容易地化简为上述标准形式的直和.

然而, 对于给定的两个不可分解的 $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数, 利用定理 2.4 判断它们是否同构却是不容易的. 这是因为定理 2.4 中矩阵表示的阴影部分依赖于 $\mathfrak{g}_0$ 与 $\mathfrak{g}_1$ 的基的选取, 在基变换下阴影部分的转换关系并不简单, 从而进一步的约化是较难做到的.

事实上, 取 $\mathfrak{g}_1$ 的另一组基 $\{\widetilde{y_1},\cdots,\widetilde{y_n}\}$, 以及 $\mathfrak{g}_0$ 的相应一组基 $\{\widetilde{x_1},\cdots,\widetilde{x_n}\}$, 满足 $\mathrm{d}f(\widetilde{x_i},\widetilde{y_j})=\delta_{ij}$. 现设基变换关系为

$$
\begin{pmatrix}\widetilde{x_1}\\ \vdots\\ \widetilde{x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & \cdots & p_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\widetilde{y_1}\\ \vdots\\ \widetilde{y_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_{11} & \cdots & q_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ q_{n1} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},
$$

其中 $P = (p_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $Q = (q_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, 代入配对关系知 $\sum\limits_{l=1}^{n} p_{il}q_{jl} = \delta_{ij}$, 即 $PQ^{\top} = I_n$. 记 $[\widetilde{x_i},\widetilde{y_j}] = \sum\limits_{l=1}^{n} \widetilde{a}_{lj}^{(i)}\widetilde{y_l}$, $\widetilde{a}_{lj}^{(i)} \in \mathbb{C}$, 则 $\widetilde{a}_{kj}^{(i)} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n}\sum\limits_{\beta=1}^{n}\sum\limits_{\gamma=1}^{n} p_{i\alpha}q_{j\beta}p_{k\gamma}a_{\gamma\beta}^{(\alpha)}$. 由 $a_{\gamma\beta}^{(\alpha)}$ 满足阴影部分的关系 (2.2) 知, $\widetilde{a}_{kj}^{(i)}$ 也满足 $\forall 1 \le i,j,k,l,m \le n$, $\sum\limits_{l=1}^{n} \widetilde{a}_{lj}^{(k)}\widetilde{a}_{ml}^{(i)} = \sum\limits_{l=1}^{n} \widetilde{a}_{lj}^{(i)}\widetilde{a}_{ml}^{(k)}$. 因此, 上述结构常数 $\{a_{kj}^{(i)}\colon 1 \le i,j,k \le n\}$ 在基变换下满足 $(1,2)$-型混合张量的变化关系, 其中下方第二个指标 j 为一个逆变指标, 上标 (i) 与下方第一个指标 k 为两个协变指标, 指标之间满足恒等式 (2.2). 特别地, 若所考虑的基变换总使得 $\forall 1 \le i,l \le n$, $a_{1l}^{(i)} = \delta_{il}$ 成立, 则结构常数 $\{a_{kj}^{(i)}\colon 1 \le i,j,k \le n\}$ 关于两个协变指标 (i) 与 k 是对称的.

因此, $(0,1)$-型 Frobenius Lie 代数的同构类问题等价于一类特殊的 $(1,2)$-型混合张量的转换关系问题, 而后者一般是较难找到标准形式的.

第三章　零权空间一维的 Frobenius Lie 代数的结构

3.1　零权空间一维的 Frobenius Lie 代数与 Para-Frobenius Lie 代数的联系

定义 3.1　设 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的幂零分次 Quasi-Frobenius Lie 代数, 满足: $\mathfrak{n} = \bigoplus\limits_{\alpha\neq 0,1} \mathfrak{n}_\alpha$ (其中求和指标 $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 关于 $\frac{1}{2}$ 对称), 且 $\omega\big|_{\mathfrak{n}_\alpha\times\mathfrak{n}_{1-\alpha}}$ $(\alpha \neq 0,1)$ 非退化, 则 $\mathfrak{n}$ 可通过中心 c 扩张与可逆半单导子 D 扩张成为 $\mathbb{C}$ 上具有一维零权空间的 Frobenius Lie 代数, 此时称 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Para-Frobenius Lie 代数.

定理 3.2　设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上具有一维零权空间的 Frobenius Lie 代数, 则 $\mathfrak{g}$ 可以表示成在某个 Para-Frobenius Lie 代数上双扩张 (即中心扩张加导子扩张) 的形式.

具体地说, 此时 $\mathfrak{g}$ 为可解的 Frobenius Lie 代数, $\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 为余一维特征理想, $\mathfrak{g}_1 = Z([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$, $(\mathfrak{n} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]/\mathfrak{g}_1,\ [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}} = [\cdot,\cdot] \pmod{\mathfrak{g}_1},\ \omega = (\mathrm{d}f)\big|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}})$ 为 Para-Frobenius Lie 代数, 且

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C}x_f \ltimes (\mathfrak{n} \rtimes \mathfrak{g}_1). \tag{3.1}$$

3.2　定理 3.2 的证明

设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius Lie 代数, f 为 $\mathfrak{g}$ 上的 Frobenius 函数, x_f 为其主元素, 不妨设为半单元. 若 $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_0 = 1$, 即 $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}x_f$, 则 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \bigoplus\limits_{\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{a}$ $= \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x) = 0\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个余一维特征理想. 由于 $\forall\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\forall x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathrm{ad}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}x_\alpha$ 为幂零元, 故由 Engel 定理 [22, 定理 3.2] 知, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 为幂零 Lie 代数. (或者, 注意 $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f)\big|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} \in \mathrm{Der}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ 为可逆导子, 则 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 必为幂零 Lie 代数 [23, 定理 3].) 由 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的降中心列知, $Z([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \neq \{0\}$. 事实上, $Z([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = \mathfrak{g}_1$.

这是因为: 一方面, 注意 $Z([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个非零理想, 则 $Z([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ 包含某个 $\mathfrak{g}_1$ 中的非零元 [28, 引理 3.2]. 又 $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_1 = \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_0 = 1$, 则 $\mathfrak{g}_1 \subseteq Z([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$. 另一方面, 由于 $\forall x \in Z([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$, $\forall\alpha \neq 0$, $[x,\mathfrak{g}_\alpha] = 0$, 则可验证 $[x_f, x] - x \in \mathrm{Rad}(f) = \{0\}$: $\forall\alpha \neq 0$, $f([[x_f,x]-x,\mathfrak{g}_\alpha]) = f([[x_f,x],\mathfrak{g}_\alpha]) = -f([[x,\mathfrak{g}_\alpha],x_f]) - f([[\mathfrak{g}_\alpha,x_f],x]) = \alpha\cdot f([\mathfrak{g}_\alpha,x]) = 0$, 且 $f([[x_f,x]-x,x_f]) = -f([x_f,x]-x) = 0$. 因此 $[x_f,x]-x = 0$, 即 $x \in \mathfrak{g}_1$, 则 $Z([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \subseteq \mathfrak{g}_1$.

现记 $\mathfrak{n}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]/\mathfrak{g}_1$, 则 $\mathfrak{n}$ 仍为幂零 Lie 代数, $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f)\big|_{\mathfrak{n}}\in\mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ 为可逆导子, 且作为线性空间有 $\mathfrak{n}\cong\bigoplus\limits_{\alpha\neq 0,1}\mathfrak{g}_\alpha$. 注意 Frobenius 结构 $\mathrm{d}f\in\bigwedge^2\mathfrak{g}$ 限制在 $\mathfrak{n}$ 上仍为辛结构 $\omega=(\mathrm{d}f)\big|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}}\in\bigwedge^2\mathfrak{n}$, 这里 $\omega(x_\alpha\pmod{\mathfrak{g}_1},x_\beta\pmod{\mathfrak{g}_1})=f([x_\alpha,x_\beta]),\ \forall\alpha,\beta\neq 0,1$, 则 $(\mathfrak{n},\omega)$ 为 Quasi-Frobenius Lie 代数. 但由于 $Z(\mathfrak{n})\neq\{0\}$, $(\mathfrak{n},\omega)$ 不为 Frobenius Lie 代数, 即辛结构 ω 不可能由 $\mathfrak{n}$ 上的某个线性函数诱导.

反之, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 可视为在 $\mathfrak{n}$ 上做中心扩张得到: 记 $\mathfrak{n}$ 中括积为 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 中括积为 $[\cdot,\cdot]$, 则适当选取 $c\in\mathfrak{g}_1$, 令括积关系如下:

$$\begin{cases}[\mathfrak{n},\mathfrak{g}_1]=0;\\ [x_\alpha,x_\beta]=[x_\alpha\pmod{\mathfrak{g}_1},x_\beta\pmod{\mathfrak{g}_1}]_{\mathfrak{n}}+\omega(x_\alpha\pmod{\mathfrak{g}_1},x_\beta\pmod{\mathfrak{g}_1})\cdot c,\ \forall\alpha,\beta\neq 0,1.\end{cases}$$

此时 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{n}\rtimes\mathfrak{g}_1$ 为中心扩张. 又 $\mathfrak{g}$ 可视为在 $\mathfrak{a}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 上由导子 $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x_f)\big|_{\mathfrak{a}}$ 扩张得到, 故 $\mathfrak{g}$ 作为 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius Lie 代数可以表示为在 $\mathfrak{n}$ 上双扩张 (即中心扩张加导子扩张) 的形式.

更一般地, 对于某种幂零分次的 Quasi-Frobenius Lie 代数 $(\mathfrak{n},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}},\omega)$, 满足: $\mathfrak{n}=\bigoplus\limits_{\alpha\neq 0,1}\mathfrak{n}_\alpha$ (其中求和指标 $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 关于 $\frac{1}{2}$ 对称), 且 $\omega\big|_{\mathfrak{n}_\alpha\times\mathfrak{n}_{1-\alpha}}$ $(\alpha\neq 0,1)$ 非退化, 则可做中心扩张 $\mathfrak{n}'=\mathfrak{n}\rtimes\mathbb{C}c$, 括积关系为 $\begin{cases}[\mathfrak{n},c]=0;\\ [x_\alpha,x_\beta]=[x_\alpha,x_\beta]_{\mathfrak{n}}+\omega(x_\alpha,x_\beta)\cdot c,\ \forall\alpha,\beta\neq 0,1.\end{cases}$

再构造 $\mathfrak{n}'$ 上的可逆半单导子 D: $\begin{cases}D(c)=c;\\ D(\mathfrak{n}_\alpha)=\alpha\cdot\mathfrak{n}_\alpha,\ \forall\alpha\neq 0,1.\end{cases}$, 并令 $\mathfrak{g}=\mathbb{C}D\ltimes\mathfrak{n}'$, $f\in\mathfrak{g}^*$ 满足 $f(D)=f(\mathfrak{n})=0,\ f(c)=1$, 则 $\forall\alpha,\beta\neq 0,1,\ f([x_\alpha,x_\beta])=\omega(x_\alpha,x_\beta)$, 此时 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上具有一维零权空间的 Frobenius Lie 代数.

3.3 Para-Frobenius Lie 代数上的对称结合双线性型

对于 $\mathbb{C}$ 上具有一维零权空间的 Frobenius Lie 代数，定理 3.2 用双扩张形式给出了初步的结构刻画, 同时也建立起了零权空间一维的 Frobenius Lie 代数与 Para-Frobenius Lie 代数的联系. 因此零权空间一维的 Frobenius Lie 代数的许多性质可在相应的 Para-Frobenius Lie 代数上有所体现.

以下考虑 $\mathbb{C}$ 上 Frobenius Lie 代数的对称结合双线性型结构. 一般地, $\mathbb{C}$ 上 Frobenius Lie 代数的任意一个对称结合双线性型必在每一个非零理想上退化 [28, 命题 2.1]. 进一步地, 在零权空间一维的情形, $\mathbb{C}$ 上 Frobenius Lie 代数的任意一个结合 (或反结合) 双线性型的秩至多为 1 (在主元素处取到), 则此时导代数上任意一个非零的结合 (或反结合) 双线性型不可能延拓到整个 Frobenius Lie 代数上.

因此, 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上具有一维零权空间的 Frobenius Lie 代数, 值得考虑的问题是 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 或 $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]/\mathfrak{g}_1$ 上对称结合 (可能退化) 的双线性型. 注意, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 与 $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]/\mathfrak{g}_1$ 上分别存在可逆导子 $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x_f)\big|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ 与 $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x_f)\big|_{\mathfrak{n}}$, 简记为 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot], D)$, 则 $x \cdot y = D^{-1}([x, D(y)])\,(\forall x, y \in \mathfrak{h})$ 定义了 $\mathfrak{h}$ 上的完备左对称 Lie-admissible 结构 [3, 引理 1.2], 即 $\mathfrak{h}$ 均为完备的左对称代数 (LSA). 此时 $\mathfrak{h}$ 为 Quadratic Lie 代数 (即存在对称结合的非退化双线性型 $B(\cdot,\cdot)$) 当且仅当 $\mathfrak{h}$ 上存在一个对称的非退化双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (即对应 Lie 群上的左不变伪 Riemann 度量) 使得它的 Levi-Civita 联络为 $\nabla_x y = x \cdot y\,(\forall x, y \in \mathfrak{h})$, 这里 $\langle x, y\rangle = B(D(x), D(y)),\ \forall x, y \in \mathfrak{h}$ [3, 命题 1.3].

类似地, 如果从 $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]/\mathfrak{g}_1$ 上的辛结构出发, 则由 $\omega(x \cdot y, z) = -\omega(y, [x, z])$ $(\forall x, y, z \in \mathfrak{n})$ 可以定义 $\mathfrak{n}$ 上的左不变乘积 $x \cdot y$, 并且这诱导了对应的 Lie 群上一个平坦无挠的不变联络 $\nabla^{\omega}_x y = x \cdot y\,(\forall x, y \in \mathfrak{n})$ [8, 定理 6]. 进一步地, 如果 $\mathfrak{n}$ 上还有 Quadratic Lie 代数结构 $B(\cdot,\cdot)$, 则对应的 Lie 群上存在一个左不变的伪 Riemann 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 使得它的 Levi-Civita 联络恰为 ∇^{ω} [25, 定理 3.9].

上述两个过程的相似性基于这个基本的观察: Quadratic Lie 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot], B)$ 上存在辛结构 ω 当且仅当 $\mathfrak{h}$ 上存在可逆导子 D 满足 $B(D(x), y) + B(x, D(y)) = 0$, $\forall x, y \in \mathfrak{h}$, 此时 $\omega(x, y) = B(D(x), y),\ \forall x, y \in \mathfrak{h}$ 且 $\omega(D(x), y) + \omega(x, D(y)) = 0,\ \forall x, y \in \mathfrak{h}$ [4, 引理 1.1].

以下我们试图直接在 $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]/\mathfrak{g}_1$ 上构造与辛结构 $\omega(\cdot,\cdot)$ 以及半单导子 $D = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x_f)\big|_{\mathfrak{n}}$ 相容的对称结合双线性型 $B(\cdot,\cdot)$. 一个初步的想法是: 令

$$B(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k-j} \cdot \omega(D^j(x), D^{k-j}(y)),\ \forall x, y \in \mathfrak{n}, \tag{3.2}$$

其中 $m \in \mathbb{N}^*$, $(b_{j,k-j})_{\substack{0\le j\le k\\ 0\le k\le n}}$ 为待定系数. 此时 $B(\cdot,\cdot)$ 显然为双线性函数, 且仅在配对的诸 $(x_\alpha \pmod{\mathfrak{g}_1},\ x_{1-\alpha} \pmod{\mathfrak{g}_1})\,(\alpha \neq 0, 1)$ 处取值可能非零, 计算为
$\sum\limits_{l=0}^{m}(-1)^l\alpha^l \cdot \left(\sum\limits_{k=l}^{m}\sum\limits_{j=0}^{l}(-1)^j \cdot \binom{k-j}{l-j} \cdot b_{j,k-j}\right)$.

然而, $B(\cdot,\cdot)$ 的对称性要求 $\sum\limits_{k=l}^{m}\sum\limits_{j=0}^{l}(-1)^j \cdot \binom{k-j}{l-j} \cdot (b_{j,k-j} + b_{k-j,j}) = 0,\ \forall 0 \le l \le m$;
$B(\cdot,\cdot)$ 的结合性要求 $\sum\limits_{k=l}^{m}\sum\limits_{j=0}^{l}(-1)^j \cdot \binom{k-j}{l-j} \cdot b_{j,k-j} = \sum\limits_{k=l}^{m}\sum\limits_{j=0}^{l}(-1)^j \cdot \binom{k-j}{l-j} \cdot b_{k-j,j} = 0,\ \forall 0 \le l \le m$;
$B(D(x), y) + B(x, D(y)) = 0\,(\forall x, y \in \mathfrak{n})$ 的要求与 $B(\cdot,\cdot)$ 的结合性要求相同.
这些迫使 $B \equiv 0$, 因此形如 (3.2) 的构造是不可行的.

第四章　低维 Para-Frobenius Lie 代数的分类

4.1　准备工作

基于问题 2 的讨论, 本节将建立零权空间一维的 Frobenius Lie 代数的两种分类方法, 并对于维数 ≤ 8 的情形给出具体的分类结果.

设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \mathrm{d}f)$ 为 $\mathbb{C}$ 上具有一维零权空间的 Frobenius Lie 代数, 由定理 3.2 知, $\mathfrak{g}$ 的分类可由 $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]/\mathfrak{g}_1$ 的分类完全确定. 因此以下只需对一类 Para-Frobenius Lie 代数 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 分类即可.

我们先讨论关于 Para-Frobenius Lie 代数 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 的若干基本性质:

引理 4.1　设 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Para-Frobenius Lie 代数, 则 $\mathfrak{n}$, $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$, $Z(\mathfrak{n})$ 均可选择一组由可逆半单导子 D 的特征向量组成的基.

证明: 由于 $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha\neq 0,1} \mathfrak{n}_\alpha$, 则 $\mathfrak{n}$ 的一组基可选为 $\{x_\alpha \in \mathfrak{n}_\alpha\colon \alpha \neq 0,1\}$, $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 的一组基可选为 $\{[x_\alpha, x_\beta] \in \mathfrak{n}_{\alpha+\beta}\colon \alpha,\beta \neq 0,1\}$ 中的线性无关元.

现设 $0 \neq (c_\alpha x_\alpha + c_\beta x_\beta) \in Z(\mathfrak{n})\,(\alpha,\beta \neq 0,1)$, 即 $[c_\alpha x_\alpha + c_\beta x_\beta, x_\gamma] = 0,\ \forall\gamma \neq 0,1$. 若 $\alpha \neq \beta$, 则结合 $[\mathfrak{n}_\alpha, \mathfrak{n}_\gamma] \subseteq \mathfrak{n}_{\alpha+\gamma}$ 知, $[c_\alpha x_\alpha, x_\gamma] = 0,\ \forall\gamma \neq 0, 1, 1-\alpha$; 且 $[c_\alpha x_\alpha, x_{1-\alpha}] = 0$, 因此 $c_\alpha x_\alpha \in Z(\mathfrak{n})$; 同理 $c_\beta x_\beta \in Z(\mathfrak{n})$. 若 $\alpha = \beta$, 则 $(c_\alpha x_\alpha + c_\beta x_\beta)$ 即为 D 属于特征值 α 的特征向量. 于是归纳可证 $Z(\mathfrak{n})$ 也可选择一组由 D 的特征向量组成的基. □

引理 4.2　设 $\mathfrak{n}$ 为任意 ≥ 2 维的幂零 Lie 代数, 则 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) \geq 2$.

证明: 由 $\mathfrak{n}$ 为非零的幂零 Lie 代数知, $\mathfrak{n}$ 的降中心列为严格降列, 则 $\mathfrak{n} \supsetneqq [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$. 假设 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) = 1$, 记 $\mathfrak{n} = [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \rtimes \mathbb{C}x$, 则 $\mathfrak{n}^1 = [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = [[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] + \mathbb{C}x, [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] + \mathbb{C}x]$ $\subseteq [[\mathfrak{n},\mathfrak{n}],[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]] + [[\mathfrak{n},\mathfrak{n}],\mathbb{C}x] \subseteq [[\mathfrak{n},\mathfrak{n}],\mathfrak{n}] = \mathfrak{n}^2$, 故由严格降中心列知, $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}^2 = \cdots = \{0\}$, 此时 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n} = 1$, 矛盾! □

推论 4.3　设 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Para-Frobenius Lie 代数, 且 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n} \geq 2$, 则可选取 $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 在 $\mathfrak{n}$ 中直和补空间的一组基, 使得它们生成整个 $\mathfrak{n}$, 且均为可逆半单导子 D 的特征向量. 特别地, 若记上述这组基为 $\{x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_k}\}$, 则 $\mathfrak{n}$ 存在一组由 D 的特征向量组成的基, 使得对应的特征值均为 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ 的非负整数线性组合.

证明: 由 $\mathfrak{n}$ 的降中心列以及引理 4.1, 4.2 即知. □

引理 4.4　设 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的任意幂零分次 Lie 代数, $x_\alpha, x_\beta \in \mathfrak{n} \setminus [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 线性无关, $x_{m\alpha+n\beta} \in [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\,(m,n \geq 1)$ 由 x_α, x_β 生成, 则对于任意的 $x_\gamma \in \mathfrak{n}$, 若 $[x_\gamma, x_\alpha] = [x_\gamma, x_\beta] =$

0, 则 $[x_\gamma, x_{m\alpha+n\beta}] = 0$.

证明: 由 $\mathfrak{n}$ 中 Jacobi 等式归纳即知. □

引理 4.5 设 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega)$ 为 Quasi-Frobenius Lie 代数, 若 $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \in \mathfrak{n}$ 满足 $[x_\alpha, x_\beta]$ 与 x_γ 配对, 则或者 $[x_\beta, x_\gamma]$ 与 x_α 配对, 或者 $[x_\gamma, x_\alpha]$ 与 x_β 配对.

证明: 由 $\omega(\cdot,\cdot)$ 满足的 Jacobi 等式即知. □

引理 4.6 设 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Para-Frobenius Lie 代数, 则对于任意的 $\alpha \neq 0, 1$, 我们总可适当调整 $\mathfrak{n}_\alpha$ 与 $\mathfrak{n}_{1-\alpha}$ 中的基元素, 使它们在 $\omega(\cdot,\cdot)$ 下具有标准的配对形式: 即 $\mathfrak{n}_\alpha$ 中的每个基元素恰与 $\mathfrak{n}_{1-\alpha}$ 中的一个基元素配对为 1, 其余均为 0.

证明: 这是线性代数中选取标准对偶基的结果. □

推论 4.7 设 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Para-Frobenius Lie 代数, 若 $Z(\mathfrak{n})$ 包含一个配对 $(x_\alpha, x_{1-\alpha})\,(\alpha \neq 0, 1)$, 则存在 Lie 代数直和 $\mathfrak{n} = (\mathbb{C}x_\alpha \oplus \mathbb{C}x_{1-\alpha}) \bigoplus \mathfrak{b}$, 其中 $\mathfrak{b}$ 仍为 Para-Frobenius Lie 代数, 且配对形式与 $\mathfrak{n}$ 中相同.

证明: 先任取线性空间的直和 $\mathfrak{n} = (\mathbb{C}x_\alpha \oplus \mathbb{C}x_{1-\alpha}) \bigoplus \mathfrak{b}$. 由于 $[x_\alpha, \mathfrak{n}] = [x_{1-\alpha}, \mathfrak{n}] = 0$, 则由引理 4.5 知, $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ 中元不可能与 x_α 或 $x_{1-\alpha}$ 配对. 再由引理 4.6 知, 可不妨设 $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{b}$, 此时 $\mathfrak{n} = (\mathbb{C}x_\alpha \oplus \mathbb{C}x_{1-\alpha}) \bigoplus \mathfrak{b}$ 为 Lie 代数直和, 且 $\mathfrak{n}$ 上的 Para-Frobenius 结构与配对形式均可继承到 $\mathfrak{b}$ 上. □

在推论 4.7 的意义下, 我们总可以设 $Z(\mathfrak{n})$ 不包含任何一个配对, 此时 $\omega\big|_{Z(\mathfrak{n})\times Z(\mathfrak{n})} = 0$. (特别地, $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathfrak{n}) \leq \dfrac{\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n}}{2}$.) 以下的讨论均在这个简化设定下进行.

引理 4.8 设 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Para-Frobenius Lie 代数, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n} \geq 2$, 且 $Z(\mathfrak{n})$ 不包含任何一个配对, 则 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}/([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] + Z(\mathfrak{n}))) \geq 2$.

证明: 由于 $Z(\mathfrak{n})$ 不包含任何一个配对以及引理 4.5 知, $Z(\mathfrak{n})$ 中元只可能与 $\mathfrak{n} \setminus ([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] + Z(\mathfrak{n}))$ 中元配对, 故 $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathfrak{n}) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n} - \dim_{\mathbb{C}}([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] + Z(\mathfrak{n}))$.
若 $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathfrak{n}) \geq 2$, 则 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}/([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] + Z(\mathfrak{n}))) \geq 2$ 成立;
若 $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathfrak{n}) = 1$, 由 $\mathfrak{n}$ 的降中心列知, $Z(\mathfrak{n}) \bigcap [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq \{0\}$, 则 $Z(\mathfrak{n}) \subseteq [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$, 故由引理 4.2 知, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n} - \dim_{\mathbb{C}}([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] + Z(\mathfrak{n})) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n} - \dim_{\mathbb{C}}([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]) \geq 2$. □

推论 4.9 设 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Para-Frobenius Lie 代数, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n} \geq 2$, 且 $Z(\mathfrak{n})$ 不包含任何一个配对. 若记 $\mathfrak{z}$ 为 $Z(\mathfrak{n}) \bigcap [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ 在 $Z(\mathfrak{n})$ 中的直和补空间, 则可选取 $([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] + Z(\mathfrak{n}))$ 在 $\mathfrak{n}$ 中直和补空间的一组基, 使得它们生成 $\mathfrak{z}$ 在 $\mathfrak{n}$ 中的直和补空间, 且均为可逆半单导子 D 的特征向量.

证明: 由推论 4.3 与引理 4.8 即知. □

现在我们可以陈述对 Para-Frobenius Lie 代数 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 的两种分类方法:

- (扩张归纳法)
  先任取 $0 \neq x_\alpha \in Z(\mathfrak{n}) \bigcap [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\,(\alpha \neq 0,1)$, 则 $\mathfrak{n} \supsetneqq (\mathbb{C}x_\alpha)^\perp \supseteq [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \supseteq \mathbb{C}x_\alpha$, 此时 $\mathfrak{n} = \mathbb{C}x_{1-\alpha} \ltimes (\mathbb{C}x_\alpha)^\perp$, 其中 $x_{1-\alpha}$ 是某个与 x_α 配对的元. 注意到 $(\mathbb{C}x_\alpha)^\perp/\mathbb{C}x_\alpha$ 仍为 Para-Frobenius Lie 代数, 且配对形式与 $\mathfrak{n}$ 中相同. 但 $\dim_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}x_\alpha)^\perp/\mathbb{C}x_\alpha) = \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n} - 2$, 故可由更低维的分类情形决定 $(\mathbb{C}x_\alpha)^\perp/\mathbb{C}x_\alpha$ 的结构. 然后, 再对 $(\mathbb{C}x_\alpha)^\perp/\mathbb{C}x_\alpha$ 做中心扩张 $\rtimes\mathbb{C}x_\alpha$ 与导子扩张 $\mathbb{C}x_{1-\alpha}\ltimes$, 并讨论多种可能的扩张方式, 则可得到 $\mathfrak{n}$ 的一种分类.

- (幂零分层法)
  先考虑 $Z(\mathfrak{n}) \bigcap [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 在 $Z(\mathfrak{n})$ 中的直和补空间 $\mathfrak{z}$, 注意 $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{z} \leq \frac{\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n}}{2} - 1$, 且 $\mathfrak{z}$ 中基元素只能与 $\mathfrak{n} \setminus ([\mathfrak{n},\mathfrak{n}] + Z(\mathfrak{n}))$ 中元配对. 由推论 4.9 知, 我们总可选取 $([\mathfrak{n},\mathfrak{n}] + Z(\mathfrak{n}))$ 在 $\mathfrak{n}$ 中直和补空间的一组基, 使得它们生成 $\mathfrak{z}$ 在 $\mathfrak{n}$ 中的直和补空间. 然后, 再对具体的生成关系与括积关系讨论, 则可得到 $\mathfrak{n}$ 的另一种分类.

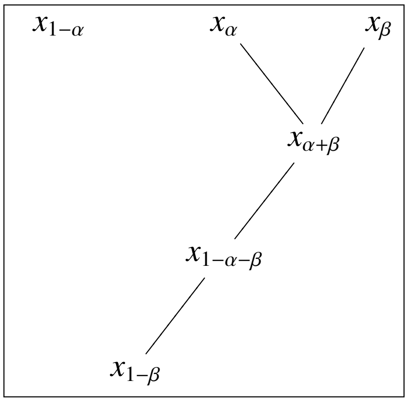
4.2 ≤ 6 维 Para-Frobenius Lie 代数的分类

定义 4.10 设 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Para-Frobenius Lie 代数, 若 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 不能写成若干个相容的 Para-Frobenius Lie 子代数的直和, 则称 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 为不可分解的 Para-Frobenius Lie 代数.

命题 4.11 低维 Para-Frobenius Lie 代数 $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \omega, D)$ 的分类如下:

- $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n} = 2$: $\mathfrak{n} = \mathbb{C}x_{1-\alpha} \oplus \mathbb{C}x_\alpha$ 为 Abel Lie 代数, 配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = 1,\ \alpha \neq 0, 1$.
- $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n} = 4$:
  (0) 可分解情形: $\mathfrak{n} = (\mathbb{C}x_{1-\alpha} \oplus \mathbb{C}x_\alpha) \bigoplus (\mathbb{C}x_{1-\beta} \oplus \mathbb{C}x_\beta)$ 为 Abel Lie 代数, 配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = \omega(x_{1-\beta}, x_\beta) = 1,\ \alpha,\beta \neq 0, 1$.
  (1) 不可分解情形: $\mathfrak{n} = \mathbb{C}x_{1-2\alpha} \ltimes ((\mathbb{C}x_{1-\alpha} \oplus \mathbb{C}x_\alpha) \rtimes \mathbb{C}x_{2\alpha})$, 非平凡括积为 $[x_{1-2\alpha}, x_\alpha] = x_{1-\alpha}$, 配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = \omega(x_{1-2\alpha}, x_{2\alpha}) = 1,\ \alpha \neq 0, \frac{1}{2}, 1$.
- $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{n} = 6$:
  (0) 可分解情形:
  (0.1) $\mathfrak{n} = (\mathbb{C}x_{1-\alpha} \oplus \mathbb{C}x_\alpha) \bigoplus (\mathbb{C}x_{1-\beta} \oplus \mathbb{C}x_\beta) \bigoplus (\mathbb{C}x_{1-\gamma} \oplus \mathbb{C}x_\gamma)$ 为 Abel Lie 代数, 配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = \omega(x_{1-\beta}, x_\beta) = \omega(x_{1-\gamma}, x_\gamma) = 1,\ \alpha,\beta,\gamma \neq 0, 1$.
  (0.2) $\mathfrak{n} = (\mathbb{C}x_{1-2\alpha} \ltimes ((\mathbb{C}x_{1-\alpha} \oplus \mathbb{C}x_\alpha) \rtimes \mathbb{C}x_{2\alpha})) \bigoplus (\mathfrak{n}_{1-\beta} \oplus \mathfrak{n}_\beta)$, 非平凡括积为 $[x_{1-2\alpha}, x_\alpha] = x_{1-\alpha}$, 配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = \omega(x_{1-2\alpha}, x_{2\alpha}) = \omega(x_{1-\beta}, x_\beta) = 1$, $\alpha \neq 0, \frac{1}{2}, 1,\ \beta \neq 0, 1$.
  (1) 不可分解情形:
  (1.1) $\dim_{\mathbb{C}}(Z(\mathfrak{n})/(Z(\mathfrak{n}) \bigcap [\mathfrak{n},\mathfrak{n}])) = 1$:

(1.1.1) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}/([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]+Z(\mathfrak{n})))=2$:



$x_{1-\alpha}\in Z(\mathfrak{n})\setminus[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$, $x_{1-\beta}\in Z(\mathfrak{n})\bigcap[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$,
$\{x_\alpha,x_\beta\}$ 为 $\mathfrak{n}/([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]+Z(\mathfrak{n}))$ 的一组基;
非平凡括积为 $[x_\alpha,x_\beta]=x_{\alpha+\beta}$,
$[x_\alpha,x_{\alpha+\beta}]=x_{1-\alpha-\beta}$, $[x_\alpha,x_{1-\alpha-\beta}]=x_{1-\beta}$;
配对为 $\omega(x_{1-\alpha},x_\alpha)=1$,
$\omega(x_{1-\beta},x_\beta)=\omega(x_{1-\alpha-\beta},x_{\alpha+\beta})=1$
$(3\alpha+2\beta=1,\ \alpha,\beta\neq 0,1)$.

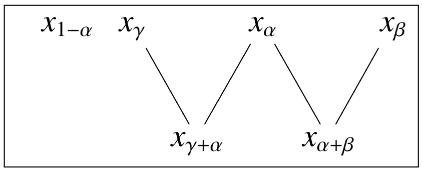
另外,

当 $\alpha=\beta=\frac{1}{5}$ 时, 可添加 $\begin{cases}[x_\beta,x_{\alpha+\beta}]=x_{1-\alpha-\beta},\\ [x_\beta,x_{1-\alpha-\beta}]=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}[x_\beta,x_{\alpha+\beta}]=0,\\ [x_\beta,x_{1-\alpha-\beta}]=x_{1-\beta}\end{cases}$;

当 $\alpha=\frac{1}{7}$, $\beta=\frac{2}{7}$ 时, 可添加 $[x_\beta,x_{\alpha+\beta}]=?\cdot x_{1-\beta}$.

(1.1.2) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}/([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]+Z(\mathfrak{n})))=3$:

① $x_{1-\alpha}\in Z(\mathfrak{n})\setminus[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$,

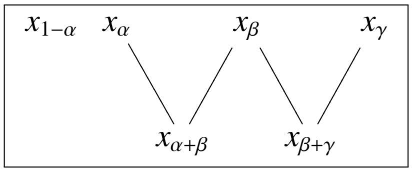


$x_{\gamma+\alpha}$[*], $x_{\alpha+\beta}\in Z(\mathfrak{n})\bigcap[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$,
$\{x_\alpha,x_\beta,x_\gamma\}$ 为 $\mathfrak{n}/([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]+Z(\mathfrak{n}))$ 的一组基;
固定一个配对 $(x_{1-\alpha},x_\alpha)$, 其余
非平凡括积与配对存在两种可能:

$$\begin{cases}[x_\gamma,x_\alpha]=x_{\gamma+\alpha},\ [x_\alpha,x_\beta]=?\cdot x_{\alpha+\beta},\\ \omega(x_{\alpha+\beta},x_\gamma)=\omega(x_{\gamma+\alpha},x_\beta)=1,\\ \alpha+\beta+\gamma=1.\end{cases} \text{或} \begin{cases}[x_\gamma,x_\alpha]=x_{\gamma+\alpha},\ [x_\alpha,x_\beta]=x_{\alpha+\beta},\\ \omega(x_{\gamma+\alpha},x_\gamma)=\omega(x_{\alpha+\beta},x_\beta)=1,\\ \alpha+2\gamma=\alpha+2\beta=1.\end{cases}$$

注意, 通过调整基我们总可使得 $[x_\gamma,x_\beta]=0$.
另外, 在前一种可能中, 若 $\beta=2\gamma$, 则可添加 $[x_\gamma,x_{\gamma+\alpha}]=?\cdot x_{\alpha+\beta}$. [*]

② $x_{1-\alpha}\in Z(\mathfrak{n})\setminus[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$,



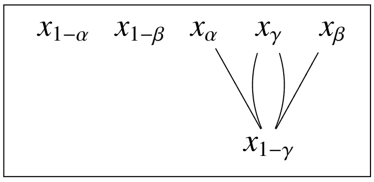
$x_{\alpha+\beta}$[*], $x_{\beta+\gamma}$[**] $\in Z(\mathfrak{n})\bigcap[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$,
$\{x_\alpha,x_\beta,x_\gamma\}$ 为 $\mathfrak{n}/([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]+Z(\mathfrak{n}))$ 的一组基;
固定一个配对 $(x_{1-\alpha},x_\alpha)$, 其余
非平凡括积与配对存在两种可能:

$$\begin{cases}[x_\alpha,x_\beta]=x_{\alpha+\beta},\ [x_\beta,x_\gamma]=x_{\beta+\gamma},\\ \omega(x_{\alpha+\beta},x_\beta)=\omega(x_{\beta+\gamma},x_\gamma)=1,\\ \alpha+2\beta=\beta+2\gamma=1.\end{cases} \text{或} \begin{cases}[x_\alpha,x_\beta]=x_{\alpha+\beta},\ [x_\beta,x_\gamma]=?\cdot x_{\beta+\gamma},\\ \omega(x_{\alpha+\beta},x_\gamma)=\omega(x_{\beta+\gamma},x_\beta)=1,\\ \alpha+\beta+\gamma=2\beta+\gamma=1.\end{cases}$$

注意, 通过调整基我们总可使得 $[x_\alpha,x_\gamma]=0$. 另外,
在前一种可能中, 当 $\alpha=\frac{3}{5},\beta=\frac{1}{5},\gamma=\frac{2}{5}$ 时, 可添加 $[x_\beta,x_{\beta+\gamma}]=?\cdot x_{\alpha+\beta}$; [**]
在后一种可能中, 当 $\alpha=\beta=\frac{1}{4},\gamma=\frac{1}{2}$ 时, 可添加 $[x_\beta,x_{\alpha+\beta}]=?\cdot x_{\beta+\gamma}$. [*]

(1.2) $\dim_{\mathbb{C}}(Z(\mathfrak{n})/(Z(\mathfrak{n})\bigcap[\mathfrak{n},\mathfrak{n}])) = 2$:

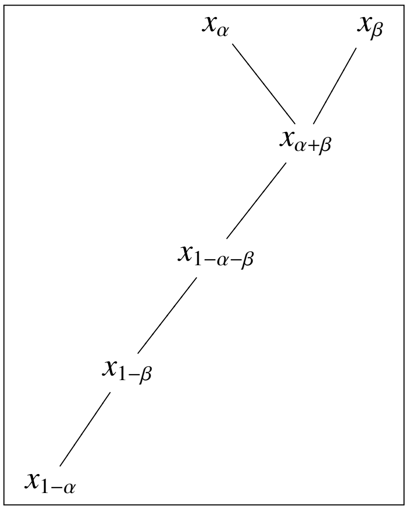
$x_{1-\alpha}, x_{1-\beta} \in Z(\mathfrak{n}) \setminus [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$, $x_{1-\gamma} \in Z(\mathfrak{n})\bigcap[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$,
$\{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\}$ 为 $\mathfrak{n}/([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]+Z(\mathfrak{n}))$ 的一组基;
非平凡括积为 $[x_\alpha, x_\gamma] = [x_\beta, x_\gamma] = x_{1-\gamma}$;



配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = \omega(x_{1-\beta}, x_\beta) = \omega(x_{1-\gamma}, x_\gamma) = 1$ $(\alpha + 2\gamma = \beta + 2\gamma = 1)$.

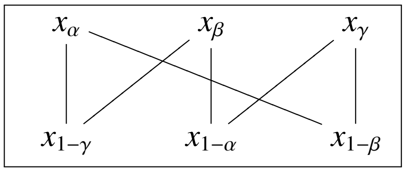
(1.3) $Z(\mathfrak{n}) \subseteq [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$:

(1.3.1) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) = 2$:



$x_{1-\alpha} \in Z(\mathfrak{n})$,
$\{x_\alpha, x_\beta\}$ 为 $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 的一组基;
非平凡括积为
$[x_\alpha, x_\beta] = x_{\alpha+\beta}$, $[x_\alpha, x_{\alpha+\beta}] = x_{1-\alpha-\beta}$,
$[x_\alpha, x_{1-\alpha-\beta}] = x_{1-\beta}$, $[x_\alpha, x_{1-\beta}] = x_{1-\alpha}$;
配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = 1$,
$\omega(x_{1-\beta}, x_\beta) = \omega(x_{1-\alpha-\beta}, x_{\alpha+\beta}) = 1$
$(\alpha = \frac{1}{7}, \beta = \frac{2}{7})$.

(1.3.2) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) = 3$:

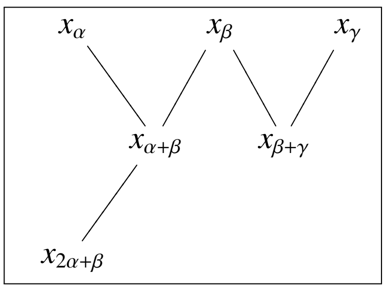


① $x_{1-\gamma}$[*], $x_{1-\alpha}, x_{1-\beta} \in Z(\mathfrak{n})$,
$\{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\}$ 为 $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 的一组基.

非平凡括积为 $[x_\alpha, x_\beta] = x_{1-\gamma}$, $[x_\beta, x_\gamma] = x_{1-\alpha}$, $[x_\alpha, x_\gamma] =?\cdot x_{1-\beta}$;
配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = \omega(x_{1-\beta}, x_\beta) = \omega(x_{1-\gamma}, x_\gamma) = 1$.
另外, 其余非平凡括积存在两种可能:

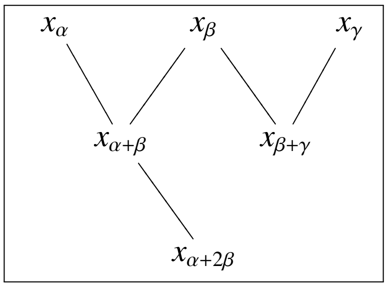
$$\begin{cases} [x_\alpha, x_{1-\gamma}] =?\cdot x_{1-\alpha}, \\ 2\alpha = \gamma. \end{cases} \quad [*] \text{ 或 } \begin{cases} [x_\alpha, x_{1-\gamma}] =?\cdot x_{1-\beta}, \\ [x_\beta, x_{1-\gamma}] =?\cdot x_{1-\alpha}, \quad [*] \\ \alpha+\beta = \gamma. \end{cases}$$

特别地, 当 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ 时, 上述可能性同时成立.



② $x_{2\alpha+\beta}, x_{\beta+\gamma} \in Z(\mathfrak{n})$,
$\{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\}$ 为 $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 的一组基.
非平凡括积为 $[x_\alpha, x_\beta] = x_{\alpha+\beta}$,
$[x_\alpha, x_{\alpha+\beta}] = x_{2\alpha+\beta}$, $[x_\beta, x_\gamma] =?\cdot x_{\beta+\gamma}$;
其余非平凡括积与配对存在三种可能:

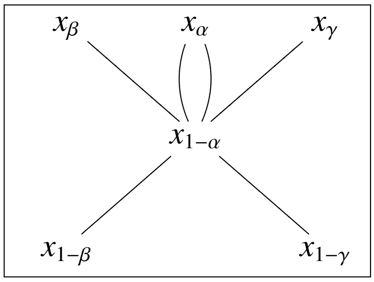
$$\begin{cases}\omega(x_{2\alpha+\beta},x_\alpha)=1,\\ \omega(x_{\alpha+\beta},x_\beta)=1,\\ \omega(x_{\beta+\gamma},x_\gamma)=1,\\ \alpha=\frac{1}{5},\ \beta=\frac{2}{5},\ \gamma=\frac{3}{10}.\end{cases}\text{或}\begin{cases}[x_\alpha,x_\gamma]=?\cdot x_{\beta+\gamma},\\ \omega(x_{2\alpha+\beta},x_\alpha)=1,\\ \omega(x_{\alpha+\beta},x_\gamma)=1,\\ \omega(x_{\beta+\gamma},x_\beta)=1,\\ \alpha=\beta=\frac{1}{4},\ \gamma=\frac{1}{2}.\end{cases}\text{或}\begin{cases}[x_\beta,x_{\alpha+\beta}]=?\cdot x_{\beta+\gamma}\\ \omega(x_{2\alpha+\beta},x_\beta)=1,\\ \omega(x_{\alpha+\beta},x_\gamma)=1,\\ \omega(x_{\beta+\gamma},x_\alpha)=1,\\ \alpha+\beta=\gamma=\frac{1}{2}.\end{cases}$$



③ $x_{2\alpha+\beta}, x_{\beta+\gamma}$[*] $\in Z(\mathfrak{n})$,
$\{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\}$ 为 $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 的一组基.
非平凡括积为 $[x_\alpha, x_\beta] = x_{\alpha+\beta}$,
$[x_\beta, x_{\alpha+\beta}] = x_{\alpha+2\beta}$, $[x_\beta, x_\gamma] = ?\cdot x_{\beta+\gamma}$;
其余非平凡括积与配对存在两种可能:

$$\begin{cases}\omega(x_{\alpha+2\beta},x_\beta)=1,\\ \omega(x_{\alpha+\beta},x_\alpha)=1,\\ \omega(x_{\beta+\gamma},x_\gamma)=1,\\ \alpha=\frac{2}{5},\ \beta=\frac{1}{5},\ \gamma=\frac{2}{5}.\end{cases}\text{或}\begin{cases}\omega(x_{\alpha+2\beta},x_\beta)=1,\\ \omega(x_{\alpha+\beta},x_\gamma)=1,\\ \omega(x_{\beta+\gamma},x_\alpha)=1,\\ \alpha+\beta+\gamma=\alpha+3\beta=1.\end{cases}$$

另外, 在第二种可能中,
当 $\alpha=\beta=\frac{1}{4}$, $\gamma=\frac{1}{2}$ 时, 可添加 $[x_\alpha, x_{\alpha+\beta}] = ?\cdot x_{\beta+\gamma}$;
当 $\alpha=\frac{4}{7}$, $\beta=\frac{1}{7}$, $\gamma=\frac{2}{7}$ 时, 可添加 $[x_\gamma, x_{\beta+\gamma}] = ?\cdot x_{\alpha+\beta}$. [*]



④ $x_{1-\beta}, x_{1-\gamma} \in Z(\mathfrak{n})$,
$\{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\}$ 为 $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 的一组基.
非平凡括积为
$[x_\alpha, x_\beta] = [x_\alpha, x_\gamma] = x_{1-\alpha}$,
$[x_\beta, x_{1-\alpha}] = ?\cdot x_{1-\beta}$, $[x_\gamma, x_{1-\alpha}] = ?\cdot x_{1-\gamma}$.

配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = \omega(x_{1-\beta}, x_\beta) = \omega(x_{1-\gamma}, x_\gamma) = 1$ ($\alpha=\frac{2}{5}$, $\beta=\gamma=\frac{1}{5}$).

(1.3.3) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) = 4$:
设 $\{x_\alpha, x_{1-\alpha}, x_\beta, x_\gamma\}$ 为 $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ 的一组基, $x_{1-\beta}, x_{1-\gamma} \in [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$. 固定 $[x_\beta, x_\gamma] = 0$ 或 $?\cdot x_{1-\beta}$, 配对为 $\omega(x_{1-\alpha}, x_\alpha) = \omega(x_{1-\beta}, x_\beta) = \omega(x_{1-\gamma}, x_\gamma) = 1$, 则其余非平凡括积为

$[x_\alpha, x_\beta]$	0 or $?\cdot x_{1-\beta}$	$?\cdot x_{1-\gamma}$	0 or $?\cdot x_{1-\beta}$	$?\cdot x_{1-\gamma}$
$[x_\alpha, x_\gamma]$	0 or $?\cdot x_{1-\gamma}$	$?\cdot x_{1-\beta}$	0 or $?\cdot x_{1-\gamma}$	$?\cdot x_{1-\beta}$
$[x_{1-\alpha}, x_\beta]$	0 or $?\cdot x_{1-\beta}$	0 or $?\cdot x_{1-\beta}$	$?\cdot x_{1-\gamma}$	$?\cdot x_{1-\gamma}$
$[x_{1-\alpha}, x_\gamma]$	0 or $?\cdot x_{1-\gamma}$	0 or $?\cdot x_{1-\gamma}$	$?\cdot x_{1-\beta}$	$?\cdot x_{1-\beta}$

4.3 关于低维幂零分次 Lie 代数分类的评注

对于 $\mathbb{C}$ 上 ≤ 8 维的具有一维零权空间的 Frobenius Lie 代数 (即 ≤ 6 维的 Para-Frobenius Lie 代数), 命题 4.11 给出了完全的分类. 同时, 在准备工作中给出的分类方法也可应用于更高维的具有一维零权空间的 Frobenius Lie 代数, 为了避免过于琐碎, 我们不再陈列相应的结果.

我们应当指出, 命题 4.11 的陈述与证明是在“幂零分层法”的框架下呈现的. 如果从“扩张归纳法”的角度看, 一个 Lie 代数同构类可能实现为多种中心扩张加导子扩张的形式, 这就为进一步的讨论带来了困难.

事实上, 命题 4.11 的工作包含于低维幂零分次 Lie 代数的分类. 关于更多幂零分次 Lie 代数的研究可参见 [13]. 另外, 一般低维幂零 Lie 代数的分类是很困难的, 因此大量的数学工作者都活跃于这一领域. 例如, 较早提出任意幂零 Lie 代数分类方法的是 Tore Skjelbred 与 Terje Sund [30], 他们也顺便给出了 $\mathbb{R}$ 上 6 维幂零 Lie 代数的分类; 后续 J. M. Ancochea 与 M. Goze 引入了重要的特征序列概念以解决一般 7 维幂零 Lie 代数的分类 [2]; 对于 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 上 7 维幂零 Lie 代数的情形, Mustapha Romdhani 展示了一个纯线性代数的方法 [29].

参考文献

[1] ALVAREZ M A, RODRíGUEZ-VALLARTE M C, SALGADO G, 2018. Contact and frobenius solvable lie algebras with abelian nilradical[J]. Communications in Algebra, 46(10): 4344-4354.

[2] ANCOCHEA BERMÚDEZ J M, GOZE M, 1986. Sur la classification des algèbres de lie nilpotentes de dimension 7[J]. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 302(17): 611-613.

[3] BAJO I, BENAYADI S, MEDINA A, 2006. Symplectic structures on quadratic lie algebras[EB/OL]. https://arxiv.org/pdf/math/0603066.pdf.

[4] BAJO I, BENAYADI S, MEDINA A, 2007. Symplectic structures on quadratic lie algebras[J]. Journal of Algebra, 316(1): 174-188.

[5] BARAJAS T, ROQUE E, SALGADO G, 2019. Principal derivations and codimension one ideals in contact and frobenius lie algebras[J]. Communications in Algebra, 47(12): 5380-5391.

[6] BRAUER R, NESBITT C, 1937. On the regular representations of algebras[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 23(4): 236-240.

[7] CAMERON A, COLL V, HYATT M, et al., 2019. The unbroken spectrum of frobenius seaweeds ii: type-b and type-c[EB/OL]. https://arxiv.org/abs/1907.08775.

[8] CHU B Y, 1974. Symplectic homogeneous spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 197: 145-159.

[9] COLL V, GIAQUINTO A, MAGNANT C, 2011. Meanders and frobenius seaweed lie algebras[J]. Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 5.

[10] COLL V, HYATT M, MAGNANT C, et al., 2015. Meander graphs and frobenius seaweed lie algebras ii[J]. Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 9 (1).

[11] COLL V, DOUGHERTY A, HYATT M, et al., 2017. Meander graphs and frobenius seaweed lie algebras iii[J]. Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 11(2).

[12] COLL V, HYATT M, MAGNANT C, 2018. The unbroken spectrum of type-a frobenius seaweeds[J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 48(2): 289-305.

[13] CORNULIER Y, 2016. Gradings on lie algebras, systolic growth, and cohopfian properties of nilpotent groups[EB/OL]. https://arxiv.org/pdf/1403.5295.pdf.

[14] CSIKÓS B, VERHÓCZKI L, 2007. Classification of frobenius lie algebras of dimension ≥ 6[J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 70(3-4): 427-451.

[15] DERGACHEV V, KIRILLOV A, 2000. Index of lie algebras of seaweed type[J]. Journal of Lie Theory, 10(2): 331-343.

[16] DIATTA A, MANGA B, 2014. On properties of principal elements of frobenius lie algebras[J]. Journal of Lie Theory, 24(3): 849-864.

[17] DIEUDONNÉ J, 1958. Remarks on quasi-frobenius rings[J]. Illinois Journal of Mathematics, 2(3): 346-354.

[18] DRINFELD V G, BELAVIN A A, 1982. Solutions of the classical yang-baxter equation for simple lie algebras[J]. Functional Analysis and Its Applications, 16 (3): 1-29.

[19] ÈLASHVILI A G, 1982. On frobenius lie algebras[J]. Functional Analysis and Its Applications, 16(4): 326-328.

[20] GERSTENHABER M, GIAQUINTO A, 1997. Boundary solutions of the classical yang-baxter equation[J]. Letters in Mathematical Physics, 40(4): 337-353.

[21] GERSTENHABER M, GIAQUINTO A, 2009. The principal element of a frobenius lie algebra[J]. Letters in Mathematical Physics, 88(1-3): 333-341.

[22] HUMPHREYS J E, 1972. Introduction to lie algebras and representation theory[M]. New York: Springer.

[23] JACOBSON N, 1955. A note on automorphisms and derivations of lie algebras[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 6: 281-283.

[24] KULIš A G, SKLJANIN E K, 1980. Solutions of the yang-baxter equation[J]. Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, 95: 129-160.

[25] MEDINA A, REVOY P, 1991. Groupes de lie à structure symplectique invariante[M]. New York: Springer: 247-266.

[26] NAKAYAMA T, 1939. On frobeniusean algebras. i[J]. Annals of Mathematics, 40(3): 611-633.

[27] NAKAYAMA T, 1941. On frobeniusean algebras. ii[J]. Annals of Mathematics, 42(1): 1-21.

[28] OOMS A I, 1980. On frobenius lie algebras[J]. Communications in Algebra, 8 (1): 13-52.

[29] ROMDHANI M, 1989. Classification of real and complex nilpotent lie algebras of dimension 7[J]. Linear and Multilinear Algebra, 24(3): 167-189.

[30] SKJELBRED T, SUND T, 1978. Sur la classification des algèbres de lie nilpotentes[J]. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 286(5): A241-A242.

[31] STOLIN A, 1991. Constant solutions of yang-baxter equation for $\mathfrak{sl}_2$ and $\mathfrak{sl}_3$[J]. Mathematica Scandinavica, 69(1): 81-88.

[32] STOLIN A, 1991. On rational solutions of yang-baxter equation for $\mathfrak{sl}_n$[J]. Mathematica Scandinavica, 69(1): 57-80.

[33] WEIBEL C A, 1994. An introduction to homological algebra[M]. Cambridge: Cambridge University Press.

[34] YANG X, ZHU F, 2018. Cuspidal prehomogeneous vector spaces for reductive lie groups and related algebraic and geometric structures[EB/OL]. https://arxiv.org/pdf/1801.02995.pdf.

致　　谢

全部的感念应当留给那些对我从来不吝善意的人们: 是你们陪着我克服了无数的嘲讽和冷遇, 并最终把我带到了今天这里. 这份并不太长的名单应当包含我的指导老师——朱富海教授, 以及其他无法一一具名的朋友们. 当然, 如有必要, 我也要感激自己对基础数学永不磨灭的赤子之心.